第 1 章

直流回路の復習

本章の内容については，既に中学・高校にて学習済であると想定している．本章の開始前に，章末の基礎知識確認用問題をまずやってもらう予定である．なお，本章の**豆知識**に記した回路図上の「電流の向き」,「電圧の向き」の表し方，並びに電圧に関する「起電力と電圧降下(の違い)」についても目を通しておいて欲しい．

1.1　オームの法則

図 1.1 のように，抵抗 R の両端にかかる電圧を V，そこに流れる電流を I とするとき，以下の関係式が成り立つ．これを**オームの法則**という．

$$V = RI. \tag{1.1}$$

1.2　レジスタンスとコンダクタンス

電流の流れにくさを表す指標が抵抗（単位：Ω, オーム）であり，一般的に記号 R で表される．抵抗の逆数を**コンダクタンス**（単位：S, ジーメンス）といい，電流の流れやすさを表す指標となる．一般的に記号 G で表される．

$$G = \frac{1}{R}. \tag{1.2}$$

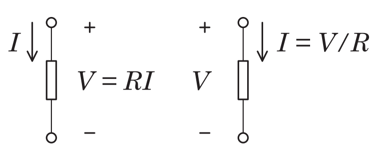

図 1.1 オームの法則.

1.3　直列接続

抵抗値 R_1, R_2, R_3 の抵抗を**図 1.2** に示すように直列接続したときの合成抵抗値 R_S は次式で与えられる．

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3. \tag{1.3}$$

この関係の基礎となっている原理原則は以下の通りである．

- **1 本の電線を流れる電流はどこも同じである.**

$$I = \frac{V_1}{R_1}, \quad I = \frac{V_2}{R_2}, \quad I = \frac{V_3}{R_3}. \tag{1.4}$$

- **複数の回路素子を直列接続したときの全体の電圧降下は個々の回路素子の電圧降下の和である．また，ループを形成しているとき，起電力の総和は電圧降**

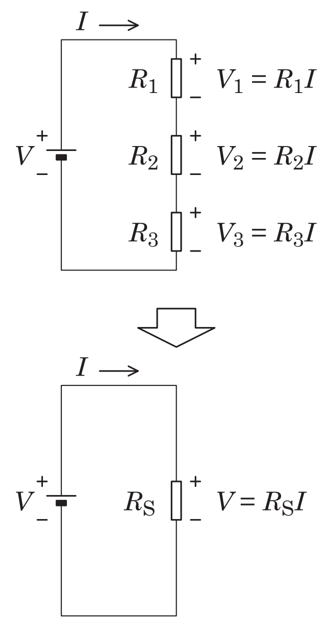

図 1.2 抵抗の直列接続.

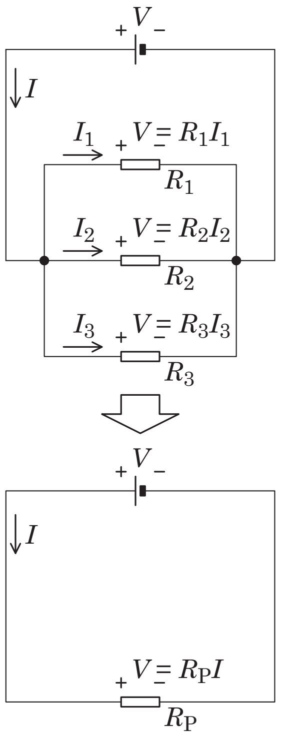

図 1.3 抵抗の並列接続.

下の総和に等しい.

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{1.5}$$

これらの関係と合成抵抗 R_S を用いたオームの法則 $V = R_S I$ から，式 (1.3) が導き出される．この式を頭に記憶するのではなく，上記の二つの理屈 (原理原則) を理解して欲しい.

1.4 並列接続

抵抗値 R_1, R_2, R_3 の抵抗を**図 1.3** に示すように並列接続したときの合成抵抗値 R_P は次式で与えられる.

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{1.6}$$

この関係の基礎となっている原理原則は以下の通りである.

- 同じ節点の間の電位差は同じである.

$$V = R_1 I_1, \quad V = R_2 I_2, \quad V = R_3 I_3. \tag{1.7}$$

- ある節点に入った電流は，出る電流に等しい.

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{1.8}$$

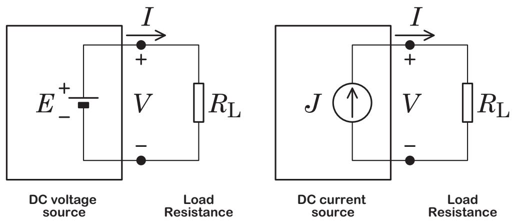

図 1.4 直流電圧源，直流電流源の回路図中の記号.

これらの関係と合成抵抗 R_P を用いたオームの法則 $V = R_P I$ から，式 (1.6) が導き出される．無理矢理 $R_P =$ に書き直せば以下のようになる.

$$R_P = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{1.9}$$

この場合も，この式を頭に記憶するのではなく，上記の二つの理屈 (原理原則) を理解して欲しい.

1.5 合成コンダクタンス

並列接続の場合には，抵抗の逆数であるコンダクタンスを用いると，すっきりする．各抵抗のコンダクタンスを G_1, G_2, G_3, これらを並列接続したときの合成コンダクタンスを G_P とする．使う原理原則は，前節の (1) と (2) である．個々のコンダクタについて成り立つオームの法則は以下の通りである.

$$I_1 = G_1 V, \quad I_2 = G_2 V, \quad I_3 = G_3 V. \tag{1.10}$$

これらと，全電流が $I = I_1 + I_2 + I_3$ となることを使えば,

$$I = (G_1 + G_2 + G_3)V. \tag{1.11}$$

となる．即ち,

$$G_P = G_1 + G_2 + G_3. \tag{1.12}$$

となり，コンダクタンスの場合には，その並列合成値は，単純な代数和となる.

1.6 電圧分割と電流分岐の応用問題～電源の内部抵抗～

直流電源（電圧源や電流源）に負荷抵抗を接続した回路図は，**図 1.4** のように表される．但し，回路図における電源は電圧を出す，または，電流を出す，という基本

的性質「だけ」をもつ理想電源 (仮想電源ともいえる) であり，現実の電源とは異なる．回路図上の理想電源の非現実的な点を以下にまとめたので，確認して欲しい．

- **電圧源**
  電圧　負荷 R_L が変わっても，電源端子間の電圧 V は絶対に変わらない (現実の電源はそんなことはできない．後述のある条件が満たされれば，変わっていないように見えるが，その変化が観測するには小さすぎる，というだけのことである．)
  電流　負荷 R_L が何であっても，端子からは $I = V/R_\mathrm{L}$ の電流を出す (即ち，$R_\mathrm{L} = 0$ (短絡) なら無限大の電流を出すのである．そんな電源は実在しない．)
- **電流源**
  電流　負荷 R_L が変わっても，端子から出る電流 I は絶対に変わらない (現実の電源はそんなことはできない．後述のある条件が満たされれば，変わっていないように見えるが，その変化が観測するには小さすぎる，というだけのことである．)
  電圧　負荷 R_L が何であっても，端子間には $V = R_\mathrm{L}J$ の電圧がかかる (即ち，$R_\mathrm{L} = \infty$ (開放) なら無限大の電圧がかかるのである．そんな電源は実在しない．)

1.7 直流電圧源における内部抵抗

実際の電圧源を回路でより正しく表そうとするときには，**図 1.5** に示すように，理想電圧源に対して直列に内部抵抗 R_i が存在する，という描像を適用する．即ち，電流が I が流れることによって内部抵抗での電圧降下 $V_\mathrm{i} = R_\mathrm{i}I$ が発生し，E がそのまま端子間電圧 V に反映されないことを考慮するのである．電圧源に対してこのような描像を持つことによって，以下のことがわかる．

- **$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ であるとき**
  「負荷抵抗の値が電圧源の内部抵抗の値と比較して十分に**大きい**とき」と表現する．この条件が満たされれば，電圧源は，その端子間電圧が負荷に依存しない理想電圧源に近い特性となる．

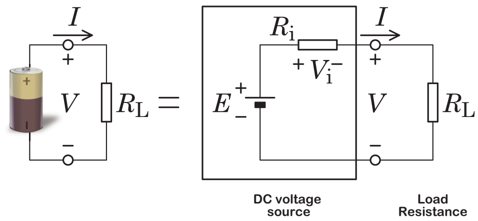

図 1.5 内部抵抗を持つ現実の直流電圧源.

- **$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ でないとき**
  電圧源の端子間電圧は負荷に依存し，その電圧源を理想電圧源として扱うことはできない．

課題

上記のようになる理由を説明せよ．

略解

起電力 E は，R_i と R_L における電圧降下の和と等しいから，

$$E = V_\mathrm{i} + V \tag{1.13}$$

である．内部抵抗 R_i と負荷抵抗 R_L に関しては，以下のオームの法則が成り立つ．

$$V_\mathrm{i} = R_\mathrm{i}I, \quad V = R_\mathrm{L}I. \tag{1.14}$$

従って，以下のようになる．

$$E = (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})I, \quad I = \frac{E}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}. \tag{1.15}$$

この I を上式の $V = R_\mathrm{L}I$ に代入すれば，

$$V = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}E = \frac{1}{1 + \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{L}}}E \tag{1.16}$$

となる．この式は，電源の端子間の電圧 V が負荷 R_L の大小によって変化することを意味する．しかし，$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ であれば，$R_\mathrm{i}/R_\mathrm{L} \ll 1$ であるから，

$$V \sim E \tag{1.17}$$

となる．即ち，負荷抵抗が電圧源の内部抵抗と比較して十分に大きいとき，電源の端子間の電圧 V は負荷 R_L の大小によって大きく変動しない．

課題

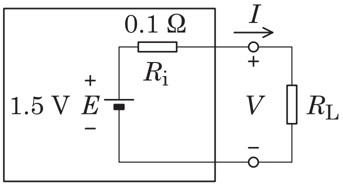

図 1.6 内部抵抗 0.1 Ω，理想起電力 1.5 V の乾電池の回路．

E = 1.5 V の乾電池に内在する内部抵抗の値を R_i = 0.1 Ω とする．このとき，負荷抵抗の値に対する端子間電圧 V と端子から流れ出る電流 I を図示し，負荷抵抗値の減少，即ち，負荷に流れる電流値の増加に伴って端子間電圧が減少することを示せ．

略解

内部抵抗 $R_i = 0.1$ Ω，理想起電力 $E = 1.5$ V の乾電池の回路は，**図 1.6** のようになる．

端子間電圧 V は次式で表される．

$$V = \frac{R_L}{R_i + R_L} E. \tag{1.18}$$

端子から流れ出る電流 I は，

$$I = \frac{V}{R_L} \tag{1.19}$$

である．これらの式を用いて R_L に対する V と I の依存性を図示すると，**図 1.7** のようになる．この図から，負荷抵抗の値が小さくなるに従って，負荷に流れる電流が増加し，同時に，端子間の電圧が減少することがわかる．ちなみに，有効数字 2 桁で 1.5 V の電池と見なすことができる負荷抵抗の条件は，おおよそ 2.8 Ω 以上となる．これよりも小さい負荷抵抗を接続した場合には，この電池は，もはや有効数字 2 桁の 1.5 V の電池としては機能せず，1.49 V 以下の電池として振る舞うのである．

1.8 直流電流源における内部抵抗

実際の電流源を回路でより正しく表そうとするときには，**図 1.8** に示すように，理想電流源に対して並列に内部抵抗 R_i が存在する，という描像を適用する．即ち，端子間に電圧 V が印加されることによって内部抵抗に流れる電流 $I_i = V/R_i$ が発生し，J がそのまま端子から出る電流 I に反映されないことを考慮するのである．

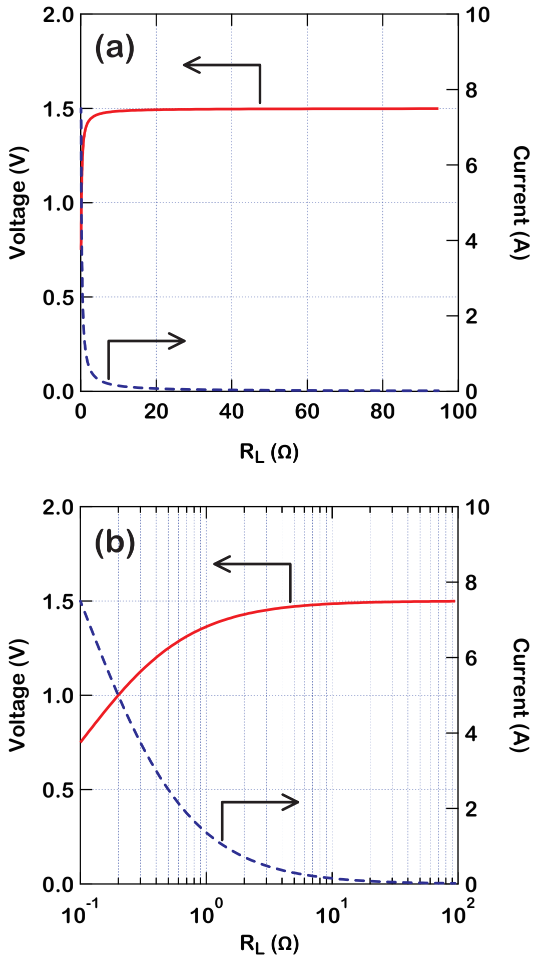

図 1.7 内部抵抗 0.1 Ω，理想起電力 1.5 V の乾電池の端子間電圧 V と端子から流れ出る電流 I の負荷抵抗値 R に対する依存性．(a) は横軸をリニアスケールで図示したもの，(b) は横軸を対数スケールで図示したものである．

電流源に対してこのような描像を持つことによって，以下のことがわかる．

- **$R_L \ll R_i$ であるとき**
  これを「**負荷抵抗の値が電流源の内部抵抗の値と比較して十分に小さいとき**」と表現する．この条件が満たされれば，電流源は，その端子から出る電流が負荷に依存しない理想電流源に近い特性となる．
- **$R_L \ll R_i$ でないとき**
  電流源の端子から出る電流は負荷に依存し，その電流源を理想電流源として扱うことはできない．

課題

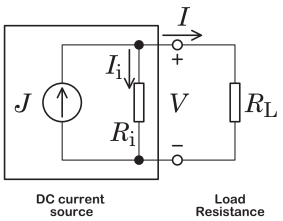

図 1.8 内部抵抗を持つ現実の直流電流源.

上記のようになる理由を説明せよ.

略解

理想電流源から出た電流 J は，内部抵抗 R_{i} に流れる電流と電源の端子から出る電流 I (即ち，負荷抵抗 R_{L} に流れる電流) の和であるから，

$$J = I_{\mathrm{i}} + I \tag{1.20}$$

となる．内部抵抗 R_{i} と負荷抵抗 R_{L} に関しては，以下のオームの法則が成り立つ.

$$I_{\mathrm{i}} = \frac{V}{R_{\mathrm{i}}}, \qquad I = \frac{V}{R_{\mathrm{L}}}. \tag{1.21}$$

従って，

$$J = \left(\frac{1}{R_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{L}}}\right)V, \qquad V = \frac{J}{\dfrac{1}{R_{\mathrm{i}}} + \dfrac{1}{R_{\mathrm{L}}}} \tag{1.22}$$

となる．この V を上式の $I = V/R_{\mathrm{L}}$ に代入すれば，

$$I = \frac{1}{R_{\mathrm{L}}} \frac{J}{\dfrac{1}{R_{\mathrm{i}}} + \dfrac{1}{R_{\mathrm{L}}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{i}}}} J \tag{1.23}$$

となる．この式は，電源の端子から出る電流 I が負荷 R_{L} の大小によって変化することを意味する．しかし，$R_{\mathrm{L}} \ll R_{\mathrm{i}}$ であれば，$R_{\mathrm{L}}/R_{\mathrm{i}} \ll 1$ であるから，

$$I \sim J \tag{1.24}$$

となる．即ち，負荷抵抗の値が電流源の内部抵抗の値と比較して十分に小さいとき，電源の端子から出る電流 I は負荷 R_{L} の大小によって大きく変動しない.

豆知識

豆知識
回路図における電流の向きと変数の符号

図 1.9 (a) に示すように，二つの端子 c と d を持つある回路素子について，その回路素子に流れる電流を変数 i で表す場合，$i > 0$ の意味するところが，

- 端子 c から端子 d に向かって流れること，を意味するのか，それとも，
- 端子 d から端子 c に向かって流れること，を意味するのか，

をあらかじめ決めておかねばならない．そのために，本講義では，**図 1.9** (b) に示すように，ある回路素子に流れる電流を i などと書く場合，その回路素子のそばに矢印を描き，その方向に流れるときが $i > 0$ である，ということを明示している．

豆知識
回路図における電圧の向きと符号

図 1.10 (a) に示すように，二つの端子 c と d を持つある回路素子について，その端子間の電圧を変数 v で表す場合，$v > 0$ の意味するところが，

- 端子 c の方が端子 d よりも v だけ電位が高い，ということを意味するのか，それとも，
- 端子 d の方が端子 c よりも v だけ電位が高い，ということを意味するのか，

をあらかじめ決めておかねばならない．そのために，本講義では，**図 1.10** (b) に示すように，ある端子間の電圧を v などと書く場合，二つの端子に + 印と − 印を付けている．例えば，端子 c に + 印を，端子 d に − 印を付けて，その素子のそばに v と書いた場合には，$v > 0$ が意味するところは，端子 c の方が端子 d よりも v だけ電位が高い，となる．この場合，$v < 0$ となれば，端子 d の方が端子 c よりも $|v|$ だけ電位が高い，もしくは，端子 c の方が端子 d よりも $|v|$ だけ電位が低いことを意味する．

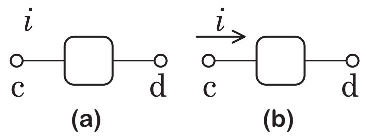

図 1.9 回路図における電流の向きと変数の符号

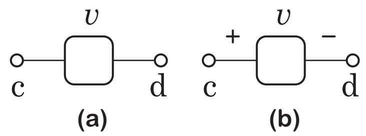

図 1.10 回路図における電圧の向きと変数の符号

豆知識
起電力と電圧降下

「起電力」と「電圧降下」はどちらも同じ電圧であるが，以下の違いがある．

- **起電力 (=電源などの能動素子の場合)**
  電位の高い方の端子から回路素子の外へ電流が流れ出るものであるから，起電力のある回路素子の中のことを考えると，電流は低い電位の方から高い電位の方に流れていることになる．
- **電圧降下 (=抵抗などの受動素子の場合)**
  電圧降下のある回路素子の中では，電流は高い電位の方から低い電位の方に流れる．

一見すると当然のことのように思うかもしないが，これをおろそかにすると，混乱することになる．

回路図における電圧と電流の正の向きをあらかじめ定めておかないと，変数の中身の正負が意味するところが異なる，ということは既に述べた．「起電力」と「電圧降下」には上述のような違いがあることから，電圧については，その電圧が「起電力」なのか，それとも「電圧降下」なのかによって，**図 1.11** に示すように，「普通はこっち向きが正」となる電圧と電流の向きの自然な組み合わせが異なってくるので，注意して欲しい．

二つの端子のうち「こっちの端子が高い電位」と想定して，そこに + 印を付け (もう片方の端子には − 印を付け)，その端子間の電圧を v などと表した場合，

- その電圧を**起電力**と捉えている場合，
  + を付けた端子から電流が流れ出る方向を電流の正

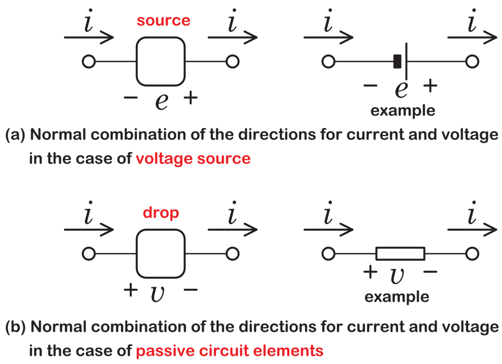

図 1.11 (a) 起電力を持つ電圧源の場合の電圧と電流の正の向きと，(b) 電圧降下をともなう抵抗，コイル，コンデンサなどの受動素子の場合の電圧と電流の正の向き．

の方向として電流の正の向きを示す矢印を描くのが普通である．一方，

- その電圧を**電圧降下**と捉えている場合，
  + を付けた端子に電流が流れ込む方向を電流の正の方向として電流の正の向きを示す矢印を描くのが普通である．

このようにややこしい区別があるので，起電力の場合には，「ここの電圧は電圧降下ではなくて，起電力なのだよ」，ということを明示するために，変数として v の代わりに e を使って，見る人に対して注意喚起する場合もある．

事前基盤知識確認事項

[1] オームの法則

抵抗 R の両端に電圧 $V(t)$ を印加したときに流れる電流を $I(t)$ とするとき，オームの法則を表す式を書け．

略解

$$V(t) = RI(t).$$

[2] 合成抵抗

抵抗 R_1 と R_2 の直列合成抵抗を R_S，並列合成抵抗を R_P とするとき，R_S と $1/R_\mathrm{P}$ を R_1 と R_2 で表せ．

略解

$$R_\mathrm{S} = R_1 + R_2, \quad \frac{1}{R_\mathrm{P}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

[3] 虚数単位を含む四則演算

j を虚数単位[*1]とし，$z_1 = 1.0 + \mathrm{j}2.0$, $z_2 = 1.0 + \mathrm{j}1.0$ とするとき，$z_1 z_2$，z_1/z_2，$|z_1|$，z_1^* を求め，$x + \mathrm{j}y$ の形式で書け．有効数字は 2 桁とする．z_1^* とは z_1 の共役複素数である．共役複素数を表す場合，数学では $\bar{z}_1$ という表現法 (バーをつける) が一般的であるが，電気回路をはじめとする工学の分野では $*$ をつけるのが一般的であるので，本稿では，$*$ をつける方式で統一することにする．

略解

$$z_1 z_2 = -1.0 + \mathrm{j}3.0,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 1.5 + \mathrm{j}0.50,$$

$$|z_1| = 2.2,$$

$$z_1^* = 1.0 - \mathrm{j}2.0.$$

有効数字に関する注意事項

*1 巻末の付録に書いたように，電気回路では虚数単位を j で表すので慣れて欲しい．また，複素数を表すとき，高校では ○○ + □□ i のような表し方をするが，工学では i の前につく □□ が極めて長い式となる場合があるので，「ここから先が虚数部だよ」ということがすぐわかるように ○○ + i □□，即ち，電気回路方式なら，○○ + j □□ という表し方をする．こちらも慣れて欲しい．

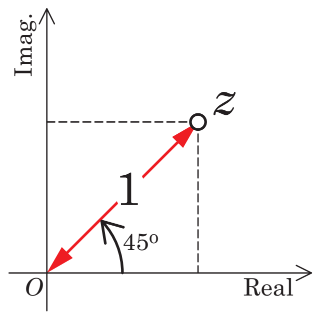

図 **1.12** 複素平面上の $z = \cos(45°) + \mathrm{j}\sin(45°)$.

工学ではなく数学しかしてこなかった皆さんの中には，割り算の結果を分数で書く人が多いと思う．工学では分数は使わない．工学では,「有効数字」を考慮した数値で表す．工学をやる以上は，工学的な考え方を身につけて欲しい．例えば，1/3 cm などという表記は，有効数字が無限大であることを意味する[*2]．有効数字が有限の (例えば 2 桁の) 現実の設計や製作の場面では，そもそも実現できない精度の長さである．有効数字を考慮した工学的表現は，0.33 cm という表し方となる．また，この表現が表している情報が,「その長さが 0.325000000⋯ cm から 0.334000000⋯ cm の間にあることは保障するが，それより高い精度は保障していない」，ということをきちっと認識して欲しい．有効数字については，学生実験で叩き込まれていることを期待したいが，知らない人はきちっと自習すること．

[4] 複素平面

$z = \cos(45°) + \mathrm{j}\sin(45°)$ を複素平面上で示せ．

略解

図 **1.12** に示す通りである．

[5] 微分積分

$f(t) = \cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)$ とするとき，$f(t)$ を微分した式と積分した式を求めよ．積分定数は省略してよい．$\omega(\neq 0)$ は t によらない定数とする．

略解

*2 米国式のインチ表記などでは，1/4 インチなどというのがまかり通っているので困るのだが ⋯．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = -\omega\sin(\omega t) + \mathrm{j}\omega\cos(\omega t)$$
$$= \mathrm{j}\omega\left\{\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)\right\}$$
$$= \mathrm{j}\omega f(t),$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{\mathrm{j}}{\omega}\cos(\omega t)$$
$$= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left\{\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)\right\}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}f(t).$$

[6] 合成関数の微分積分

$f(t) = \mathrm{e}^{at}$，$g(t) = \mathrm{e}^{bt}$ とするとき，以下の関数を書け．積分定数は省略せよ．a，b はゼロでない定数である．

$$f(t)g(t),\quad \frac{f(t)}{g(t)},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t),\quad \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

略解

$$f(t)g(t) = \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{bt} = \mathrm{e}^{(a+b)t},$$

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{bt}} = \mathrm{e}^{(a-b)t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{at} = a\mathrm{e}^{at},$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{at}.$$

[7] 二つの正弦波の位相差

$f(t) = \sin(\omega t)$，$g(t) = \sin(\omega t + 90°)$ とするとき，$f(t)$ と $g(t)$ が表す波形を図示せよ．電気回路をはじめとする波動を扱う分野では，$f(t)$ と $g(t)$ がこのような状態にあることを，「$g(t)$ は $f(t)$ に対して 90° だけ位相が進んでいる」と表現する．

略解

図 1.13 に示す通りである．

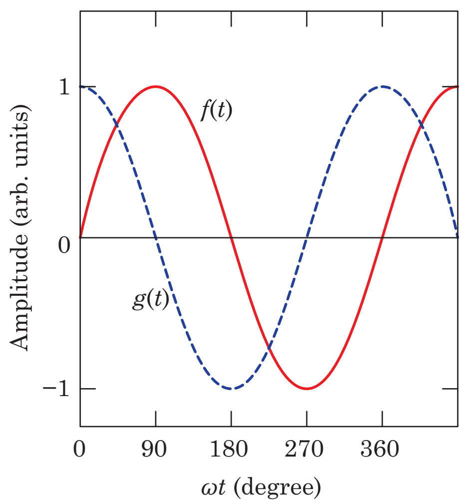

図 1.13 位相差のある正弦波の波形．