第 3 章

フェーザ

本章では，以下のことを学ぶ.

- $a(t) = A_\mathrm{m} \sin(\omega t + \theta)$ を $a(t) = A_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ に置き換えても線形回路方程式は成り立つ.
- $a(t) = A_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ から $\mathrm{j}\omega t$ をのぞき, 振幅 A_m の代わりに実効値 $A_\mathrm{e} = A_\mathrm{m}/\sqrt{2}$ を用いたものを**フェーザ**という．即ち，$a(t)$ のフェーザ表記を A とすると，

$$A = A_\mathrm{e} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

  と表される[*1].
- フェーザ形式の電圧 V と電流 I を用いると，抵抗に加えて，微分・積分が関与するコイルとコンデンサについても，以下のようなオームの法則的関係が成り立つ.

$$v(t) = R\ i(t) \qquad \Rightarrow \qquad V = R\ I$$

$$v(t) = L\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad V = \mathrm{j}\omega L\ I$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\ \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I$$

- 従って，フェーザ形式を用いれば，正弦波交流を扱う電気回路の問題を解くときに，上記の左側の 3 つの関係を組み合わせた複雑な微分・積分方程式を使う必要がなくなり，**直流のときのオームの法則に相当する上記右側の 3 つの関係式と四則演算を使うだけでよい**．**直流の時と違う点は，電流・電圧が大きさと偏角を有する複素数になるという点である**.

3.1 フェーザ形式の導入の前に〜正弦波の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ による表現方法と利用方法〜

電気回路のように正弦波のみを扱う分野では，正弦波の表し方として，

$$i(t) = I_\mathrm{m} \sin\omega t \quad や \quad i(t) = I_\mathrm{m} \cos\omega t \tag{3.1}$$

のように三角関数を用いて表す代わりに，

$$i(t) = I_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = I_\mathrm{m} \exp(\mathrm{j}\omega t) \tag{3.2}$$

と表すことが多い[*2]．電気回路で「フェーザ形式」を導入する際にも，正弦波で変化する電圧・電流が，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ で表現できることを前提とする．そこで，まず，このように表してよいのかどうか，について確認する.

3.2 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を用いるとどうなるのか

以下の関係（オイラーの公式）があることは既知であるとする.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \exp(\mathrm{j}\omega t) = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t. \tag{3.3}$$

実は，「線形微分方程式」と呼ばれる特定の条件を満たした微分方程式では，sin や cos の代わりに，上記の exp を用いたものを使っても，以下のようになるだけである，ということが数学的にわかっている.

- **sin の代わりに exp を用いた場合**
  exp を用いた計算結果の**虚数部分**が sin を用いた計算結果と同じになる.
- **cos の代わりに exp を用いた場合**
  exp を用いた計算結果の**実数部分**が cos を用いた計算結果と同じになる.

[*1] この表記法は，数学的には便利だが，数値を扱う工学では不便である．そのため，次章以降では，これを $A = A_\mathrm{e}\angle\theta$ と表し，θ の単位として度「°」を用いることになるので留意して欲しい.

[*2] ここで，exp() は，$\mathrm{e}^{()}$ と書くと，指数部が小さくて鬱陶しいので，このような書き方をしている．状況に応じて適宜使い分けているので，慣れて欲しい.

なお，この関係は線形微分方程式以外では成り立たないので注意のこと．電気回路学基礎で扱う回路方程式は全て線形微分方程式である．また，sin と cos とが両方用いられている場合には，次の関係等を使って，exp **に置き換える前に，以下のように，どちらかに統一しておく必要がある**．

- sin に統一しようとするときに，cos が混じっていた場合には，cos が sin の 90° 位相が進んだ関数であることを利用して cos を sin 表記に変換しておいてから，exp に変換する．

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \quad (3.4)$$

- cos に統一しようとするときに，sin が混じっていた場合には，sin が cos の 90° 位相が遅れた関数であることを利用して sin を cos 表記に変換しておいてから，exp に変換する．

$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \quad (3.5)$$

3.3 正弦波を $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 形式で表したときの回路素子の表し方〜フェーザ形式の一歩手前〜

ここでは，正弦波を $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 形式で表すと，抵抗，コイル，コンデンサの電流電圧の関係がどのような式になるかを示す．結論から先に言うと，sin や cos で表した場合には，微分や積分が関与してくるのに対して，exp で表すと，全て

$$v(t) = [\quad] i(t) \quad (3.6)$$

というオームの法則のような形式なる．以下では，抵抗，コイル，コンデンサの三つの基本回路素子について，このような形式になることを示す．

3.3.1 抵抗

抵抗の電流電圧の関係式は，

$$v(t) = R\, i(t) \quad (3.7)$$

であった．R をかけ算するだけであるから，exp 形式にしても抵抗の場合には，関係式は同じである．

この関係式の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の R 倍
- **位相差**: 電圧と電流は同相

3.3.2 コイル

コイルの電流電圧の関係式は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \quad (3.8)$$

であった．$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ とすると，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega L\, I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad (3.9)$$

となる，即ち，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega L\, i(t) \quad (3.10)$$

となっていることがわかる．従って，コイルの場合の関係式 (3.10) の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の ωL 倍になる
- **位相差**: 電圧は電流に対して 90° 位相が進む[*3]

3.3.3 コンデンサ

コンデンサの電流電圧の関係式は，

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \quad (3.11)$$

であった．$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ とすると，

$$v(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad (3.12)$$

となる，即ち，

$$v(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, i(t) \quad (3.13)$$

となっていることがわかる．

従って，コイルの場合の関係式 (3.13) の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の $\dfrac{1}{\omega C}$ 倍になる
- **位相差**: 電圧は電流に対して 90° 位相が遅れる[*4]

[*3] j がかけ算されているからである．詳細は章末の豆知識を参照のこと．

[*4] j で割り算されているからである．詳細は章末の豆知識を参照のこと．

3.4 フェーザ

正弦波を exp 形式で表すと，計算中の等式の右辺と左辺に必ず $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ が現れる．従って，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を両辺から削除しても，等式は成り立つ．そこで，電流や電圧の表し方として，最初から，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を除いて表してしまう，ということをする．これがフェーザ形式を導入する基本的な考え方である．即ち，正弦波を

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \tag{3.14}$$

によって表現する代わりに，おおちゃくをして，

$$I = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{3.15}$$

が正弦波を表しているものとしてしまおう，というものである．

この考え方は，線形微分方程式であれば，周波数 ω が変わることは無く，変わるのは振幅と位相だけ，ということに基づいている．変わるのが振幅と位相だけなら，振幅と位相の情報だけを持つパラメータで表現すれば，それでよいではないか，という考え方である．この振幅と位相の情報だけを持つのが「フェーザ」と呼ばれる複素数である．この複素数の大きさが振幅情報に相当し，複素数の偏角が位相情報に相当する．

但し，後述のように振幅情報についてはある決まったルールが設けられている．即ち，フェーザの大きさに振幅そのものの情報を持たせるのではなく，振幅を少しだけ改変した「実効値」なるものにする，というルールである．このルールが先に登場すると，話がややこしくなるので，ここでは，まずはそのルールを無視して説明し，最後にそのルールを適用する．

3.5 フェーザ形式を用いた各素子の電流と電圧の関係

ここでは，フェーザ形式を用いた場合に，抵抗，コイル，コンデンサの電流と電圧の関係が以下のようになることを学ぶ．

$$V = R\ I, \tag{3.16}$$

$$V = \mathrm{j}\omega L\ I, \tag{3.17}$$

$$V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I. \tag{3.18}$$

電流を $i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ とすると，そのフェーザ形式は，

$$I = I_{\mathrm{m}} \tag{3.19}$$

である．電圧を $v(t) = V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ とすると，そのフェーザ形式は

$$V = V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{3.20}$$

である．これらが，抵抗，コイル，コンデンサの場合にどのような関係式で結ばれるのかを以下に示す．

3.5.1 抵抗

抵抗のもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = R\ i(t) \tag{3.21}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = R\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.22}$$

となる．両辺の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = R\ I_{\mathrm{m}} \tag{3.23}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = R\ I. \tag{3.24}$$

3.5.2 コイル

コイルのもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega L\ i(t) \tag{3.25}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.26}$$

両辺の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \mathrm{j}\omega L\ I_{\mathrm{m}} \tag{3.27}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = \mathrm{j}\omega L\ I. \tag{3.28}$$

3.5.3 コンデンサ

コンデンサのもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} i(t) \tag{3.29}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.30}$$

両辺の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I_\mathrm{m} \tag{3.31}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I. \tag{3.32}$$

3.6 フェーザ形式の大きさは「実効値」

既に但し書きで述べたように，電気回路では以下のような取り決めがある．

> **フェーザ形式の大きさ (絶対値) は，振幅ではなく実効値とする．**

ここから，それを適用する．

実効値 A_e は，正弦波の振幅を A_m とした場合，以下のように，**振幅を $\sqrt{2}$ で割ったもの**として与えられる．

$$A_\mathrm{e} = \frac{A_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}. \tag{3.33}$$

例えば，$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ であるとき，これに対応するフェーザ形式は，

$$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad I = I_\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta},\quad I_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \tag{3.34}$$

となる．何故，$\sqrt{2}$ で割ったものを実効値などという名前を付けて利用するのか，については，後ほど説明する．

3.7 フェーザまとめ

正弦波交流の電圧と電流の表現方法には，従来の波形を表す形式に加えて，**フェーザ形式**というものがあり，お互いに以下のような関係にある．

$$\begin{array}{c} v(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t+\theta) \\ \text{または} \\ v(t) = V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}. \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} V = V_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \\ V_\mathrm{e} = \dfrac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}. \end{array} \tag{3.35}$$

$$\begin{array}{c} i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\phi) \\ \text{または} \\ i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}. \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} I = I_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}, \\ I_\mathrm{e} = \dfrac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}. \end{array} \tag{3.36}$$

フェーザ形式の電圧 V と電流 I を用いると，抵抗に加えて，微分・積分が関与するコイルとコンデンサについても，以下のようなオームの法則的関係が成り立つ．

$$v(t) = R\ i(t) \quad \Longleftrightarrow \quad V = R\ I, \tag{3.37}$$

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad V = \mathrm{j}\omega L\ I, \tag{3.38}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\ \mathrm{d}t \quad \Longleftrightarrow \quad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I. \tag{3.39}$$

従って，フェーザ形式を用いれば，正弦波交流を扱う電気回路の問題を解くときに，上記の左側の 3 つの関係を組み合わせた複雑な微分・積分方程式を使う必要がなくなり，

> **直流のときのオームの法則に相当する上記右側の 3 つの関係式と四則演算を使うだけでよい．直流の時と違う点は，電流・電圧が大きさと偏角を有する複素数になる**

という点である．

なお，フェーザ形式は，正弦波交流電気回路の問題に取り組むときに極めて便利な形式であるが，

- 「波形からフェーザへ」
- 「フェーザから波形へ」

が出来なければ，フェーザ形式での計算が出来たとしても，それはもはや電気回路の問題に取り組んでいるのではなく，単に複素数を含む算数をやっているだけ，になってしまう．そこで，フェーザ形式が表しているものが何なのか，を再認識して頂くために，抵抗，コイル，コンデンサに流れる交流電流と，そこにかかる交流電圧の関係を，波形とフェーザ形式の両方で示し，その特徴を以下にまとめた．

3.7.1 抵抗

抵抗に流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.1** のようになる．即ち，波形の位相のずれは無く，大きさのみが変わる．これがフェーザ形式で表した場合には，位相のずれが無いことから，ベクトル的に表したフェーザの方位が同一となり，長さだけが異なる，という状況になる．

3.7.2 コイル

コイルに流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.2** のようになる．即ち，電流波形は電圧波形に対して 90° だけ位相が遅れる（電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が進む）．電流に対して電圧はその大きさが ωL 倍となる．フェーザ形式で表した場合には，電圧に対して電流が 90° だけ位相が遅れているという状況が，90° だけフェーザの偏角が小さい，ということに対応して描かれることになる．大きさについては，電流に対して電圧のフェーザは ωL 倍の大きさで描かれることになる．

3.7.3 コンデンサ

コンデンサに流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.3** のようになる．即ち，電流波形は電圧波形に対して 90° だけ位相が進む（電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が遅れる）．電流に対して電圧はその大きさが $1/\omega C$ 倍となる．フェーザ形式で表した場合には，電圧に対して電流が 90° だけ位相が進んでいるという状況が，90° だけフェーザの偏角が大きい，ということに対応して描かれることになる．大きさについては，電流に対して電圧のフェーザは $1/\omega C$ 倍の大きさで描かれることになる．

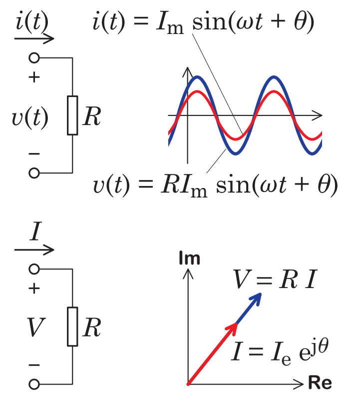

図 3.1 抵抗における電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

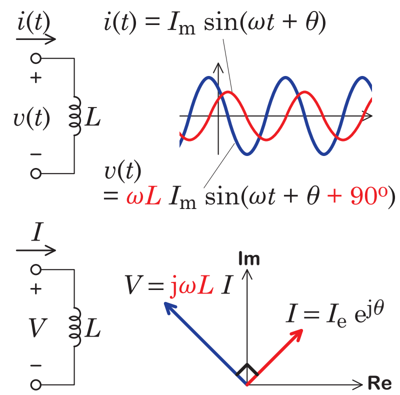

図 3.2 コイルにおける電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

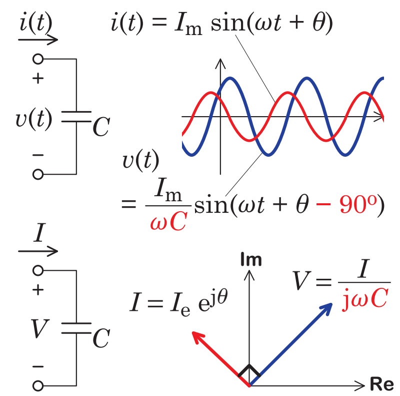

図 3.3 コンデンサにおける電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

3.8 実効値

本章の前半の説明では，フェーザ形式の電流電圧の大きさ（絶対値をとったもの）は，実関数に戻したときの「振幅」としていた．しかし，途中で但し書きを書いたように，フェーザ形式の電流電圧の大きさは，振幅ではなく「実効値」なるものにする，というルールを紹介し，実効値が振幅を $\sqrt{2}$ で割ったものである，ということを述べた．その時点では，なぜ，$\sqrt{2}$ で割ったものを「実効値」などという特別な名前を付けて定義するのか，また，振幅の変わりになぜ実効値を使うのか，については何も言及しなかった．本節では，以上の二つの「なぜ」にたいする回答に相当する説明をする．

3.8.1 電力計算と実効値

実効値なるものを定義する必要があるのは，それを定義しておかないと，電力計算のときに，ちょっとおかしなことが起こるからである．抵抗 R に電圧 V を印加して電流 I が流れたときの，直流の場合の電力 P の計算式は,

$$P = VI = RI^2 \tag{3.40}$$

であるが，交流ではどのようになるであろうか？

抵抗 R に電圧 $v(t) = V_\mathrm{m}\sin\omega t$ を印加して電流 $i(t) = I_\mathrm{m}\sin\omega t$ が流れたときの，電力 $p(t)$ の計算式は,

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{3.41}$$

である．これは瞬時値であるが，一周期 (周期 $T = 2\pi/\omega$) で平均化した平均電力 P を見てみると (各自で以下の積分をやってみること),

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t \\ &= V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

となる．即ち，直流の場合は単純に電圧と電流をかけ算したら良かったのだが,

> **交流の場合の電力を求めるときには，電圧と電流の振幅を単純にかけ算したらダメで，1/2 という係数がつく，**

ということがわかる．

そこで,

> **交流の時も，直流の時のように電圧と電流を表すものを単純にかけ算したらよい**という風にしよう,

という目的で使用されるのが「実効値」である．

即ち，電圧と電流の振幅をそれぞれ $\sqrt{2}$ で割ったものを振幅「のように」扱えば，電力計算のときに 1/2 をかける，などということはせずに，直流の時のように電圧と電流の振幅のようなもの (= 実効値) を単にかければよい，ということになる[*5]．以上の理屈により，フェーザ形式の電圧と電流の絶対値 (=実効値) を単純にかけ算すれば電力の大きさが出てくることになる．

しかし，フェーザは大きさしか持たない実数ではなく，大きさと偏角をもつ複素数である．複素数のままでかけ算するとどうなるのであろうか？これについては,「複素電力」の章で学ぶ.

[*5] なお，この 1/2 を掛けるという作業を電力計算のときにちゃんとやればよいではないか，というポリシーの教科書では，フェーザの大きさは振幅である，と定義されている．

豆知識

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 1: sin の代わりに exp を使った例

$i(t) = A\sin(\omega t+\theta)$ なる電流がコイルに流れたときのコイルの電圧 $v(t)$ を sin の表記のままで求める方式と，exp の表記に直して求める方式とを比較してみよう．

コイルの電圧 $v(t)$ は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.43}$$

で与えられるから，sin のままで $v(t)$ を求めると以下のようになる．

$$v(t) = \omega LA\cos(\omega t+\theta). \tag{3.44}$$

一方，exp を用いると，

$$i(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \tag{3.45}$$

と表され，これをコイルの式に代入すると，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \tag{3.46}$$

となる．sin を exp に置き換えた場合は，最終結果の虚部を見ればよい．exp を用いて得られた結果を，その実部と虚部がわかるように書くと，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\cos(\omega t+\theta) - \omega LA\sin(\omega t+\theta) \tag{3.47}$$

となる．確かに exp で計算した結果の虚部は，sin のままで計算した結果と同じになっていることが確認できる．

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 2: cos の代わりに exp を使った例

$i(t) = A\cos(\omega t+\theta)$ なる電流がコイルに流れたときのコイルの電圧 $v(t)$ を cos の表記のままで求める方式と，exp の表記に直して求める方式とを比較してみよう．

コイルの電圧 $v(t)$ は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.48}$$

で与えられるから，cos のままで $v(t)$ を求めると以下のようになる．

$$v(t) = -\omega LA\sin(\omega t+\theta). \tag{3.49}$$

一方，exp を用いると，

$$i(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \tag{3.50}$$

と表され，これをコイルの式に代入すると，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \tag{3.51}$$

となる．cos を exp に置き換えた場合は，最終結果の実部を見ればよい．exp を用いて得られた結果を，その実部と虚部がわかるように書くと，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\cos(\omega t+\theta) - \omega LA\sin(\omega t+\theta) \tag{3.52}$$

となる．確かに exp で計算した結果の実部は，cos のままで計算した結果と同じになっていることが確認できる．

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 3: ダメな例

ここでは，上記のような置き換えをしてはダメな例を示す．即ち，置き換えが許される線形微分方程式では「無い」場合である．$i(t) = A\sin(\omega t+\theta)$ なる $i(t)$ に対して，

$$w(t) = K\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{3.53}$$

なる非線形微分方程式を想定してみる．sin のままで計算すると，

$$\begin{aligned} w(t) &= K(\omega LA)^2\cos^2(\omega t+\theta) && (3.54)\\ &= K(\omega LA)^2\frac{1-\cos[2(\omega t+\theta)]}{2} && (3.55)\end{aligned}$$

となる．一方，exp に置き換えた場合には，

$$\begin{aligned} w(t) &= K(\mathrm{j}\omega LA)^2\exp[2\mathrm{j}(\omega t+\theta)] && (3.56)\\ &= -K(\omega LA)^2\cos[2(\omega t+\theta)] && (3.57)\\ &\quad -\mathrm{j}K(\omega LA)^2\sin[2(\omega t+\theta)] && (3.58)\end{aligned}$$

となる．sin の場合は，虚部を見れば良いはずであるが，この虚部が sin のままで計算した結果とは一致していないことがわかる．

豆知識

「j を掛ける」「j で割る」ということの物理的意味

フェーザ形式を導入すると式の中に「j を掛ける」「j で割る」という形が出てくる．それぞれの物理的意味はそれぞれ以下のような意味を持つ．

- **j を掛ける**
  位相を $\pi/2$ (90°) だけ進ませせる．
- **j で割る**
  位相を $\pi/2$ (90°) だけ遅らせせる．

これらについて以下に説明する．

まず，$\mathrm{j}\omega L$ という式の中にある「j をかけ算する」ということの物理的意味を考えてみよう．j は exp 形式で書けば

$$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.59}$$

である．従って，j を乗じるということは，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega L\ i(t) \tag{3.60}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.61}$$

$$= \omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.62}$$

という式からわかるように，かけ算する前の物理量の**位相を $\pi/2$ だけ進ませる**ことに相当する．

次に，$1/(\mathrm{j}\omega C)$ のという式の中の j による割り算の物理的意味を考えよう．この場合は，

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.63}$$

からわかるように，割り算する前の物理量の**位相を $\pi/2$ だけ遅らせる**ことに相当する．

以上のことを理解していれば，$\sin(\omega t+\pi/2)$ や $\sin(\omega t-\pi/2)$ という風にわざわざ書き直さなくても，j によるかけ算・割り算の状況をを見るだけで，$\pi/2$ (90°) の位相の進み・遅れを把握することができる．

豆知識

なぜ $1/\sqrt{2}$？パート 2

$P = (1/2)V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}$ の 1/2 をなくそうとするだけなら，「電圧の振幅だけ 1/2 にして電流の振幅は振幅のままにしてもええんちゃうか？」というのも，$P = VI$ という関係式を成り立たせるだけなら正論である．なんで，フェーザ形式の電圧と電流の大きさを同じ数で割り算するルールにしているのだろう？という疑問を持った人がいれば，ちょっと嬉しい (少しは頭を使ってくれているから)．

但し，この疑問を持つということは，$P = VI$ という関係だけを見ている，という近視眼的な頭なので，少し頭の使い方を「木を見て森を見ず」ではなく「木を見て森も見る」という風にして欲しい．

電圧の振幅 V_{m} と電流の振幅 I_{m} の間には，

$$V_{\mathrm{m}} = [\ ]I_{\mathrm{m}}$$

という関係があるが，電圧と電流をフェーザにしたときも，この関係がきちっと成り立つようにしておく必要がある．即ち，

$$V = [\ ]I$$

とならねばならない．

もしも，$|V| = V_{\mathrm{m}}/2$，$|I| = I_{\mathrm{m}}$ というルールにしてしまうと，$P = VI$ は成立するが，$V = [\ ]I$ が成立しなくなる，ということはおわかり頂けると思う．$V = [\ ]I$ もちゃんと成立するようにするためには，フェーザ形式の電圧と電流の大きさ（絶対値）を振幅をもとにして定義するときに，電圧も電流も同じ数で割り算しておかないといけない，ということがおわかり頂けると思う．

豆知識

自乗平均値 (root-mean-square: rms)

波形が正弦波の時は，振幅を $\sqrt{2}$ で割った電圧と電流をかけ算したらよい，というルールで電力計算は OK であった．では，正弦波で無かったらどうか？例えば矩形波とか三角波とかではどうか？

この場合は，瞬時電力の一周期分の平均に立ち戻って考える必要がある．電圧波形が $v(t) = V_{\mathrm{m}}f(t)$ で表されるものとし，電流波形が $i(t) = I_{\mathrm{m}}g(t)$ で表されるものとする．ここで，$f(t)$ と $g(t)$ は，任意の周期関数である．但し，周期はどちらも T とする．このときの電圧波形と電流波形から計算される電力の平均値は，次式のようになる．

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.64}$$

従って，正弦波の場合に

$$V_{\mathrm{e}} = V_{\mathrm{m}}/\sqrt{2},$$
$$I_{\mathrm{e}} = I_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}$$

という関係式になっていたところが，任意の周期関数の場合には，

$$V_{\rm e} = V_{\rm m}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,{\rm d}t}, \tag{3.65}$$

$$I_{\rm e} = I_{\rm m}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,{\rm d}t} \tag{3.66}$$

ということになる．

抵抗 R の両端に正弦波交流が印加された場合のように，$f(t) = g(t)$ である場合には，

$$V_{\rm e} = V_{\rm m}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,{\rm d}t}, \tag{3.67}$$

$$I_{\rm e} = I_{\rm m}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T g(t)^2\,{\rm d}t} \tag{3.68}$$

と書くことができる．従って，この場合には，

$$V_{\rm e} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,{\rm d}t}, \tag{3.69}$$

$$I_{\rm e} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,{\rm d}t} \tag{3.70}$$

となる．即ち，電圧や電流の二乗の平均値が実効値となる．このような二乗 (自乗ともいう) の平均値のことを**自乗平均値 (root-mean-square: rms)** や **RMS 値**と言っている．

おおまかに言うと，RMS 値とは，時間変動する量の平均的な変動の度合いを表したものということができる．正弦波のように振幅というものがわかる波形の場合には，振幅がその変動の度合いを表すことになるが，任意の波形の場合には，振幅はわからない．かといって，単純に平均値を計算すると，正と負の変動幅が同じであれば，平均値はゼロになってしまい変動の度合いを表していることにならない．何か良い方法はないかな，と考えてみると，二乗したものを平均すればこのゼロになってしまうということを避けることができることに気づく．二乗しているので，次元としては，もとの物理量とは異なってしまうが，それのルートをとればもとの物理量と同じ次元になる．RMS 値を初めて考えた人の発想はこうではないだろうか．

最近では交流波形の諸量を測定できるテスターも安く入手できるようになっており，振幅や RMS 値を自動的に表示してくれる．このような計測器を扱うとき，電気回路学を学んだ人は，交流電圧や交流電流を計測するときに，計測器が示している値が RMS 値を示しているのか，それとも，振幅を示しているのか，ということを常に意識するように心がけて欲しい．そうでないと，波形を再現するときに困る．また，電力を計算するときにも，以下のように困ったことになる．

- 「おい，この電圧と電流は単純にかけ算して電力を計算してもええんか？計測器が実効値を示してたんか，振幅を示してたんか，ちゃんと記録してたか？」
- 「何？ 記録してへんかったやと！？」
- 「ほな電力がわからんやないか！」
- 「電気回路，習たんちゃうんか！？もっぺん測ってこい！」

ということになる．

事前基盤知識確認事項

[1] 正弦波の微分と積分 (その 1)

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin\omega t$ とするとき，以下のことを示せ．

- $L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t)$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ進んだ波形となる．
- $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\ \mathrm{d}t$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ遅れた波形となる．

略解

$$
\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \omega L\ I_{\mathrm{m}} \cos\omega t \\
&= \omega L\ I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= -\frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}} \cos\omega t \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

[2] 正弦波の微分と積分 (その 2)

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos\omega t$ とするとき，以下のことを示せ．

- $L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t)$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ進んだ波形となる．
- $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\ \mathrm{d}t$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ遅れた波形となる．

略解

$$
\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= -\omega L\ I_{\mathrm{m}} \sin\omega t \\
&= \omega L\ I_{\mathrm{m}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}} \sin\omega t \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

[3] j によるかけ算と割り算

ある数 (複素数) に j をかけ算すると，その数の偏角はどうなるか？ある数 (複素数) を j で割り算すると，その数の偏角はどうなるか？

略解

- $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ によるかけ算は，偏角を $\frac{\pi}{2}$ 増やす．即ち，偏角を 90° 増やす．
- $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ による割り算は，偏角を $\frac{\pi}{2}$ 減らす．即ち，偏角を 90° 減らす．

[4] $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ の微分と積分

$i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \mathrm{j}\omega L\ i(t), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} i(t)
\end{aligned}
$$

となることを示せ．

略解

$$
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \left(I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\ i(t). \tag{3.71}
$$

$$
\frac{1}{C}\int \left(I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ i(t). \tag{3.72}
$$

[5] オイラーの公式の実部と虚部

確認事項 [1] と [2] の結果は，それぞれ，[4] の虚部と実部に対応していることを確認せよ．

略解 $i(t)$ をオイラーの公式で書けば，

$$
i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = I_{\mathrm{m}}\cos\omega t + \mathrm{j}I_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{3.73}
$$

となる．これに対し，

$$
\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \mathrm{j}\omega L\ i(t) \\
&= \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \omega L\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \omega L\ I_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \mathrm{j}\omega L\ I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ i(t) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

となり，虚部と実部に対応していることが確認できる．線形微分方程式については，このような対応が一般的に成り立つことが数学的に保障されている．

事後学習内容確認事項

1. 正弦波の指数関数表現

交流電気回路の電流波形と電圧波形が従う回路方程式は，線形微分方程式となる．この方程式に従う電流波形と電流波形の表記の仕方として，三角関数を用いた実関数表現以外に，複素数を指数に持つ指数関数表現がある．以下の実関数表現

$$v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta), \qquad i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi)$$

に対応する指数関数表現を書け．

略解

与えられた実関数表現の電圧波形と電流波形を指数関数表現すると，

$$v(t) = V_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)}, \qquad i(t) = I_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)}$$

となる．

2. 正弦波のフェーザ表記

指数関数表現の回路方程式の全ての項に共通についてくる時間依存の項；

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

を省いてしまい，振幅と位相の情報のみで方程式を記述したときの複素数をフェーザという．通常は大文字で表す．

上記問題の電圧波形と電流波形をフェーザ形式で表せ．また，電気回路特有の表記法である極座標形式でも表せ．

略解

上記問題の電圧波形と電流波形をフェーザ形式で表すと，

$$V = V_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \qquad I = I_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

となる．なお，フェーザの絶対値は波形の振幅ではなく実効値であるから，実際の波形とフェーザとの対応は以下の通りとなる．

$$V_{\mathrm{e}} = \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}, \qquad I_{\mathrm{e}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}.$$

フェーザを極座標表記すれば，以下のようになる．

$$V = V_{\mathrm{e}} \angle \theta, \qquad I = I_{\mathrm{e}} \angle \phi.$$

2. 回路素子の電圧と電流の関係

抵抗，コイル，コンデンサについて，フェーザ形式の電圧と電流の間に成り立つ関係式を書け．

略解

抵抗 R の場合，

$$v(t) = R\, i(t) \quad \Longrightarrow \quad V = R\, I$$

となる．

コイル L の場合，

$$v(t) = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \quad \Longrightarrow \quad V = \mathrm{j}\omega L\, I$$

となる．

コンデンサ C の場合，

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I$$

となる．