

第 4 章

インピーダンス・アドミタンス・極座標形式

本章では、以下のことを学ぶ。

• インピーダンス

フェーザ形式で表した電圧を V ，フェーザ形式で表した電流を I とするとき，

$$V = ZI$$

なる関係式における Z をインピーダンスという。一般に，記号 Z で表される。

• アドミタンス

インピーダンスの逆数をアドミタンスという。一般に，記号 Y で表される。電圧，電流との関係は，

$$I = YV$$

となる。

インピーダンスは，直流しか扱っていなかったときのオームの法則：

$$V = RI$$

の抵抗 R に相当する。直流のオームの法則と異なる点は，

- V と I がフェーザ (複素数) であり，
- Z も複素数である，

という点だけである。

交流回路の解析は， $\sin$ や $\cos$ の波形のままで解析しようとする，微分と積分が混在した複雑な方程式になってしまうことを既に確認した。これに対し，フェーザ形式を用いれば，交流回路の解析は，上記の二つ点を考慮して計算する必要があるが，直流抵抗回路の解析と全く同じ原理で行うことができる。

4.1 インピーダンス

抵抗しか扱わない直流回路におけるオームの法則は，

$$V = RI \quad (4.1)$$

であった。

交流の場合においても，フェーザ形式という表現方法を用いることによって，抵抗，コイル，コンデンサのどの場合も，オームの法則のように

$$V = ZI \quad (4.2)$$

という形式で表されることを学んだ。 Z は，抵抗の場合は実数，コイルの場合は正の虚数，コンデンサの場合は負の虚数であった。

複数の回路素子の直並列接続で構成されている回路の二つの端子間についても，同様の関係が成り立つ。この場合， Z は任意の複素数となる。電気回路学では，このフェーザ版オームの法則の式の中の抵抗に相当する Z をインピーダンス (impedance) と呼ぶ。一般に，インピーダンスは記号 Z で表されることが多い。単位は Ω (オーム, Ohm) である。

任意のインピーダンスを回路図中で表すときは，「□」の記号で表す (抵抗の記号と同じであるので間違わないように... 昔は抵抗の記号はギザギザ記号であったが，世界標準に合わせたことでインピーダンスの記号と抵抗の記号の区別が無くなってしまった...).

課題

$R, \omega L, \frac{1}{\omega C}$ の単位が全て Ω であることを確認せよ。

略解

ω の単位は， $[\text{rad s}^{-1}]$ である。ラジアンは無次元量であるから，単位としては， $[\text{s}^{-1}]$ である。 L の単位は $[\text{H}]$

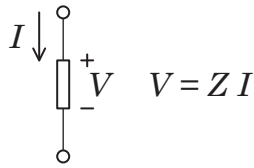


図 4.1 インピーダンス.

(ヘンリー)である. $[H]$ は, $v = L di/dt$ という関係からわかるように, 以下の関係を満たす.

$$[V] = [H][A][s]^{-1} \Rightarrow [H] = [V][A]^{-1}[s]. \quad (4.3)$$

従って, ωL の単位は,

$$[s^{-1}][L] = [V][A]^{-1} = [\Omega] \quad (4.4)$$

となる. 一方, C の単位は, $[F]$ (ファラッド)である. $[F]$ は, $v = \frac{1}{C} \int i dt$ という関係からわかるように, 以下の関係を満たす.

$$[V] = [F]^{-1}[A][s] \Rightarrow [F] = [V]^{-1}[A][s]. \quad (4.5)$$

従って, $\frac{1}{\omega C} = (\omega C)^{-1}$ の単位は,

$$([s]^{-1}[F])^{-1} = [V][A]^{-1} = [\Omega] \quad (4.6)$$

となる.

4.2 回路素子のインピーダンス

抵抗, コイル, コンデンサの単独のインピーダンスを復習しておこう. 以下の通りである.

- 抵抗 R
- コイル $j\omega L$
- コンデンサ $\frac{1}{j\omega C}$

4.3 インピーダンスの直列接続

合成インピーダンスの求め方は, 適用する原理原則が直流回路の場合と全く同じであるから, 抵抗の直列・並列接続の場合と全く同じである. 異なる点は, 扱う数値が大きさしかもたない実数ではなく, 大きさと偏角 (もしくは実部と虚部) を持つ複素数である, という点である.

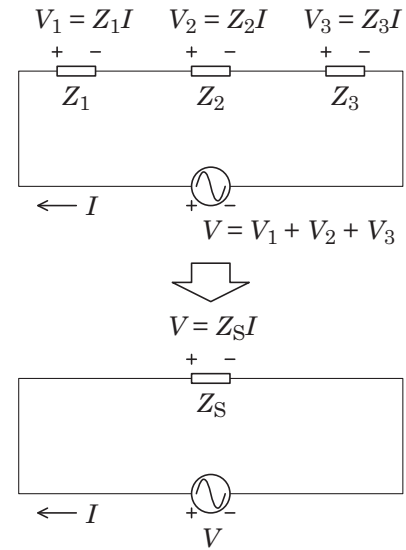


図 4.2 インピーダンスの直列合成.

図 4.2 は直列接続の場合の考え方を示した図である. 抵抗の場合に適用した原理原則を R を Z にして, もう一度ここに示そう.

- (1) 1本の電線を通る電流はどれも同じである.

$$I = \frac{V_1}{Z_1}, \quad I = \frac{V_2}{Z_2}, \quad I = \frac{V_3}{Z_3}. \quad (4.7)$$

- (2) 複数の回路素子を直列接続したときの全体の電圧降下は個々の回路素子の電圧降下の和である. また, ループを形成しているとき, 起電力の総和は電圧降下の総和に等しい.

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \quad (4.8)$$

以上の原理原則から, $V = Z_s I$ を満たす直列合成インピーダンス Z_s が以下になるということが導き出される.

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3. \quad (4.9)$$

簡単な合成インピーダンスの具体例を図 4.3 に示す.

4.4 インピーダンスの並列接続

図 4.4 は並列接続の場合の考え方を示した図である. 抵抗の場合に適用した原理原則を R を Z にして, もう一度ここに示そう.

- (1) 同じ節点の間の電位差は同じである.

$$V = Z_1 I_1, \quad V = Z_2 I_2, \quad V = Z_3 I_3. \quad (4.10)$$

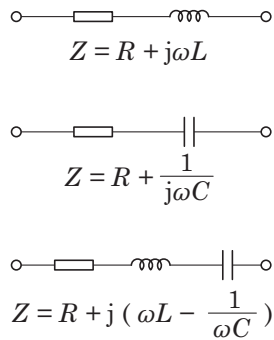


図 4.3 簡単な合成インピーダンスの例.

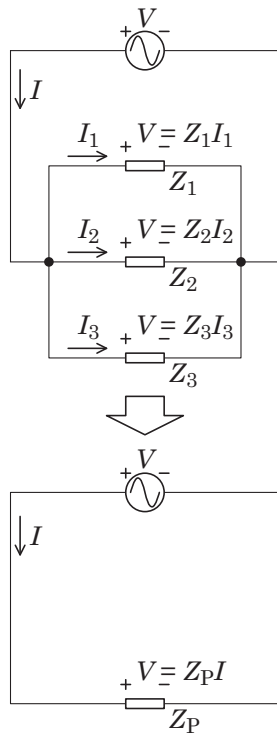


図 4.4 インピーダンスの並列合成.

(2) ある節点に入った電流は、出る電流に等しい.

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.11)$$

以上の原理原則から、 $V = Z_P I$ を満たす並列合成インピーダンス Z_P が以下になるということが導き出される.

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}. \quad (4.12)$$

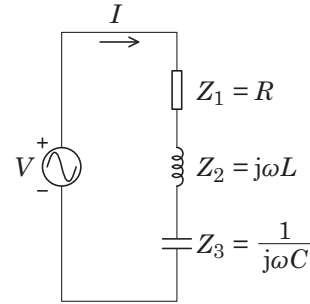


図 4.5 交流問題の簡単な例.

4.5 抵抗とリアクタンス

合成インピーダンスの例からわかるように、インピーダンスは、一般には、以下のように実部と虚部を持つ.

$$Z = R + jX. \quad (4.13)$$

実部 R を抵抗成分 (もしくは、単に抵抗 (**resistance**)), 虚部 X をリアクタンス成分 (もしくは、単にリアクタンス (**reactance**)) と呼ぶ. リアクタンスは、その正負によって以下のように呼ばれる.

- $X > 0$: 誘導性リアクタンス
- $X < 0$: 容量性リアクタンス

コイル (インダクタ) のインピーダンスが正の純虚数, コンデンサ (キャパシタ) のインピーダンスが負の純虚数, であることから、このように呼ぶことはわかると思う.

4.6 交流の場合の「問題を解く」の例

交流回路の「問題を解く」は、多くの場合、電源の素性と回路の素性が与えられている状況で、流れる電流を求めるという場合が多い.

例えば、図 4.5 に示す回路において、フェーザ形式で電圧 V が与えられているとき、フェーザ形式で電流 I を求めよ、というような問題である. こうした問題に対する取り組み方法は、電圧と電流の挙動を規定する原理原則が直流でも交流でも同じであるから、基本的に直流抵抗回路の場合と同じ考え方でよい. 異なるのは、

- 直流の場合は、電圧と電流の絶対値だけ考慮すればよい. $V = RI$ の R も絶対値だけを扱うので、実数の四則演算だけでよい.

- 交流の場合は、電圧と電流を、絶対値に加えて位相も考慮するフェーザという形式で取り扱う。 $V = ZI$ の Z (インピーダンス) も絶対値と偏角（もしくは実部と虚部）を有するので、複素数の四則演算を行う必要がある。

という点である。

4.7 アドミタンス

抵抗の逆数としてコンダクタンスが定義されていたように、インピーダンスの場合にも、その逆数として**アドミタンス (admittance)** というものが定義されている。即ち、

$$I = Y V. \quad (4.14)$$

における Y をアドミタンスという。インピーダンス Z との関係は、

$$Y = \frac{1}{Z}. \quad (4.15)$$

という逆数の関係にある。単位はコンダクタンスの場合と同様に S (ジーメンズ, **Siemens**) である。アドミタンスも回路図上では「□」で描く。

4.8 コンダクタンスとサセプタンス

インピーダンスの実部と虚部に名前が付いていたように、アドミタンスにも名前が付いている。

$$Y = G + jB \quad (4.16)$$

における G をコンダクタンス (**conductance**), B をサセプタンス (**susceptance**) という。また、 B については、これまたインピーダンスのリアクタンスのように、その値が正か負かによって以下のように区別している。

- $B > 0$: 容量性サセプタンス
- $B < 0$: 誘導性サセプタンス

4.9 アドミタンスの直列並列接続

アドミタンスを直列、並列接続したときの合成アドミタンスは、図 4.6、図 4.7 に示すように、直流の時のコンダクタンスの場合と同じである。アドミタンスを直

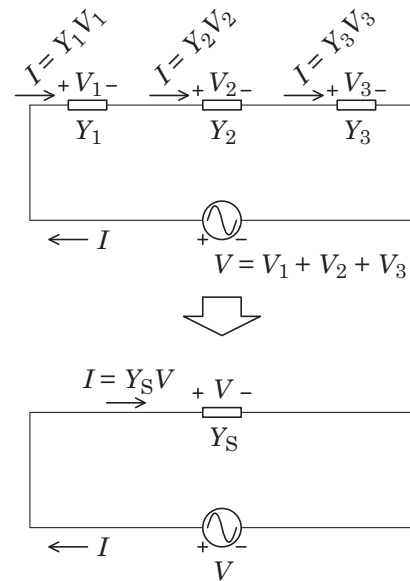


図 4.6 アドミタンスの直列合成。

列合成した場合には、

$$\frac{1}{Y_S} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} \quad (4.17)$$

となり、アドミタンスを並列合成した場合には、

$$Y_P = Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad (4.18)$$

となる。

4.10 電気回路特有の複素数の表記法

フェーザ形式で交流回路の挙動を考えると、その計算過程で複素数を扱うことになる。数学を学んだときの複素数の一般的な表記法は、実部と虚部を用いた直角座標形式と呼ばれる形式であった。しかし、位相の変化を求めたりする電気回路では、実部と虚部が明示されている直角座標形式よりも、絶対値と偏角が明示されている方が実用的であるため、**極座標形式** というものがよく用いられる。以下に複素数の表記法をまとめておく。

• 直角座標形式

$$z = x + jy$$

インピーダンスの足し算、引き算の時には便利であり、実際に使う。しかし、かけ算割り算になると不便である。また、偏角もすぐにはわからない。

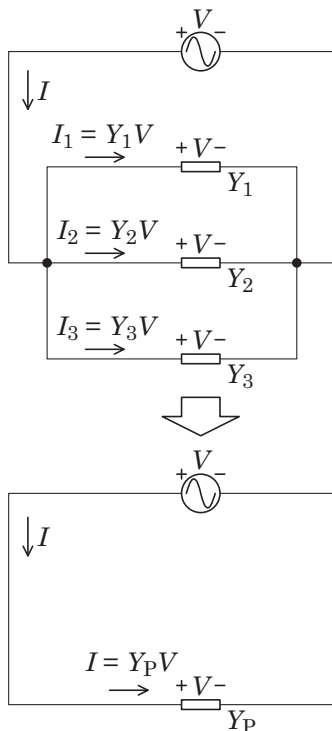


図 4.7 アドミタンスの並列合成.

• 指数関数形式

$$z = re^{j\theta} = r \exp[j\theta]$$

これは極座標形式の一種であるが、指数関数を使うので、本講義では「指数関数形式」と呼ぶことにする。この場合の θ の単位はラジアンが用いられる。数値を扱わない理論計算の時には、この形式が良く用いられるが、実際の工学的問題の場合には、偏角が π 何倍などという形では出てこないで、次に示すような角度を度で表した方式が良く用いられる。例えば、「偏角が 1 ラジアン」と言われても、どれくらいの角度なのかはすぐにわからないハズである。

• 極座標形式

$$z = r \angle \theta$$

この場合の θ の単位は度「°」が用いられる。度を用いるのは数値を扱う工学的問題を対象とするからである。先ほどの 1 ラジアンは、度で表すと、約 57° である。これならば、だいたい 60° なので、三角定規を思い浮かべれば、どれくらいの角度なのかはすぐにピンとくるハズである。

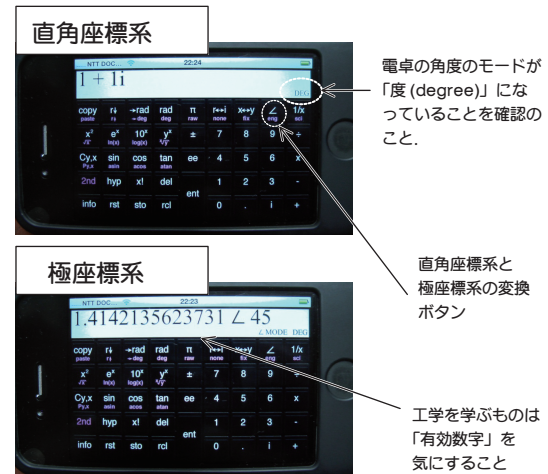


図 4.8 関数電卓による直角座標系と極座標系の変換例.

4.11 極座標形式の計算例

極座標形式の計算例を以下に示す。例えば、かけ算の場合には、

$$(4 \angle 15^\circ) \times (2 \angle 30^\circ) = 8 \angle 45^\circ \quad (4.19)$$

となる。割り算の場合には、

$$\frac{4 \angle 15^\circ}{2 \angle 30^\circ} = 2 \angle -15^\circ \quad (4.20)$$

となる。

関数電卓によっては、こうした極座標表記と直角座標表記の変換をしてくれるものがある。電気回路を扱う場合には、そのような電卓を良く使う。最近では、スマホアプリで無料のものがあるので利用するとよい。なお、関数電卓で角度を扱うときには、電卓の角度の単位の設定に気をつけること。

4.12 交流電源の内部インピーダンスと内部アドミタンス

現実の直流電源には内部抵抗なるものが潜んでいることを以前に述べた。交流の電源の場合にも、現実の交流電源には、内部インピーダンスが潜んでいる。

図 4.9 に示すように、交流電源を交流電圧源としてみた場合、電源端子から電源側を見たときに、 $V = ZI$ を満たす Z を電源の内部インピーダンスという。なお、内部インピーダンスがいくらか？ということを計算したりす

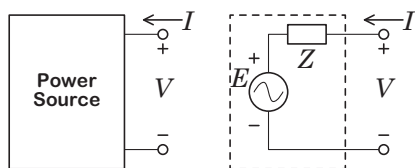


図 4.9 内部抵抗を考慮した電源 (電圧源として見た場合).

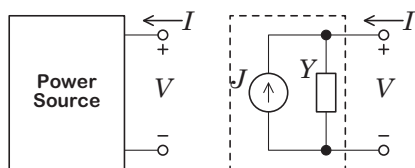


図 4.10 内部抵抗を考慮した電源 (電流源として見た場合).

るときには、電源回路の中の理想電源部分は全て"OFF"にして考える。

図 4.10 に示すように、交流電源を交流電流源としてみた場合、電源端子から電源側を見たときに、 $I = YV$ を満たす Y を電源の内部アドミタンスという。なお、内部アドミタンスがいくらか？ということを計算したりするときには、電源回路の中の理想電源部分は全て"OFF"にして考える。

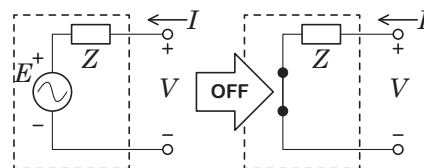
4.13 電源の OFF とは？

電圧源と電流源では、OFF というコトバが意味する状況が異なることに留意して欲しい。電圧源の場合には、 $E = 0$ であるから、図 4.11(a) に示すように、電圧源の部分が短絡されている状況を意味する。一方、電流源の場合には、 $J = 0$ であるから、図 4.11(b) に示すように、電流源の部分が開放されている状況を意味する。

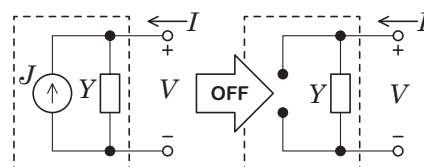
4.14 等価の概念

ある電流電圧特性を示す回路は、一つだけではない。同じ $V = ZI$ なる電流電圧の関係になる回路をお互いに「等価」である、という。等価な回路を等価回路という。

例えば、電源回路の場合には、図 4.9 と図 4.9 に示すように、



(a) "OFF" in the case of a voltage source



(a) "OFF" in the case of a current source

図 4.11 電源を OFF する，ということの意味。(a) 電圧源の場合は短絡 (ショート) であり，(b) 電流源の場合は開放 (オープン) である。

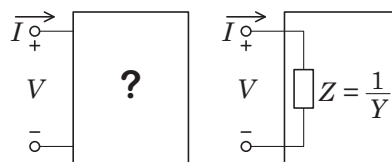


図 4.12 複雑回路の入力インピーダンス，入力アドミタンス。

- 電圧源を用いて表す方式
- 電流源を用いて表す方式

の二通りがある。これらの電源のパラメータが、

$$E = ZJ, \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (4.21)$$

なる関係を満たせば、両者は等価回路である，ということになる。即ち、電源端子側から電源側を見たときに、どちらも同じ電流電圧特性を示すのである。

4.15 複雑回路の入力インピーダンス

電源部を含む回路を、端子側から電源側に見込んだときに存在するインピーダンスを内部インピーダンスと称した。これに対して、電源部を含まない受動回路だけで構成されている回路を、端子側から回路側に見込んだときのインピーダンスやアドミタンスを入力インピーダンス，入力アドミタンスと称する。端子から回路を見たとき

きに，電流と電圧の間に

$$V = ZI, \text{ あるいは } I = YV \quad (4.22)$$

なる関係があるとき， Z が入力インピーダンス， Y が入力アドミタンスである．

豆知識

豆知識

回路図で「なくす」の意味するところは？

直列回路で回路素子をなくす場合と、並列回路で回路素子をなくす場合では、意味が異なることに留意すること。図 4.13 に示すように、多くの場合、直列回路で「 Z_2 を無なくす」は、 Z_2 がある部分を短絡することに対応する。この場合は、多くの人が間違わずに $Z_2 = 0$ とする。一方、多くの場合、並列回路で「 Z_2 をなくす」は、 Z_2 がある部分を開放にすることに対応する。これまでの経験では、多くの人が間違って $Z_2 = 0$ とする。正しくは、 $Z_2 = \infty$ であることに注意すること。

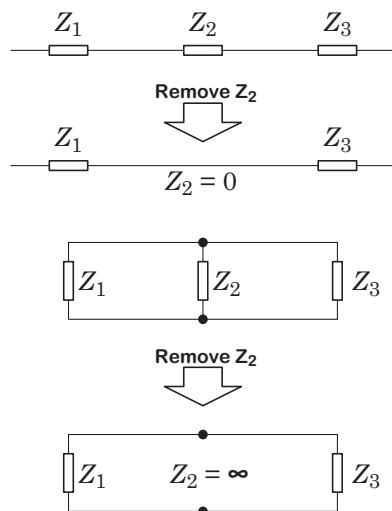


図 4.13 電気回路図の上で「なくす」が意味するところ。

事前基盤知識確認事項

[1] フェーザ形式による表現の復習

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$ なる電流のフェーザ形式による表現を書き、複素平面上で描け。

略解

$i(t)$ をフェーザ形式で表すと、

$$I = I_e e^{j\theta}$$

となる。ここで、フェーザの絶対値は実効値 (振幅/ $\sqrt{2}$) であるから、

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

となる。これを複素平面上で図示すれば、図 4.14 のようになる。

[2] フェーザ形式による表現の復習

$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ なる電圧のフェーザ形式による表現を書き、複素平面上で描け。

略解

$v(t)$ をフェーザ形式で表すと、

$$V = V_e e^{j\theta}$$

となる。ここで、フェーザの絶対値は実効値 (振幅/ $\sqrt{2}$) であるから、

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

となる。これを複素平面上で図示すれば、図 4.15 のようになる。

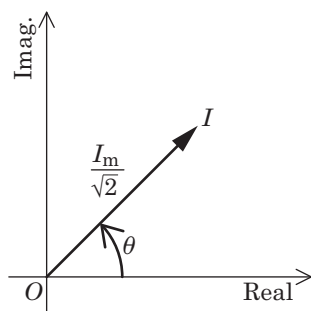


図 4.14 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現.

[3] 直列接続の場合の合成抵抗の復習

R_1, R_2, R_3 を直列接続したときの合成抵抗 R_S は?

略解

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3$$

[4] 並列接続の場合の合成抵抗の復習

R_1, R_2, R_3 を並列接続した合成抵抗 R_P は?

略解

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

交流の場合の抵抗に相当する「インピーダンス」も、全く同じように扱ってよいことを本章で学ぶ。違うのは、値が大きさだけではなく、実部と虚部を持つ（もしくは、大きさと偏角を持つ）複素数である、という点である。

[5] 極座標形式の電気回路の表現

$$z = r e^{j\theta}$$

なる複素数を、電気回路では、

$$z = r \angle \theta$$

なる独特の形式で表す流儀がある。例えば、 $r = 2.0$, $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ならば、それぞれどのように表されるか、書いてみよ。有効数字は 2 桁とする。

略解

$$z = 2.0 \angle 45^\circ.$$

[6] 角度の表現方法

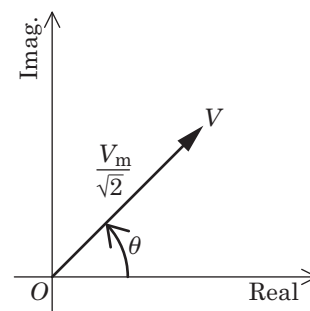


図 4.15 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現.

0.77 ラジアンがどのような角度か図示せよ。44° がどのような角度か図示せよ。

略解

省略。

この課題は、具体的数値を扱う工学において、ラジアンと度のどちらの表現方法が具体的な角度を頭に描き易いか、を考えてもらうための課題である。少なくとも筆者は、44°の方が具体的な角度を頭に描きやすい。

ラジアンで角度を明記することに価値があるのは、 π の何倍か、という極めて限られた場合だけを扱う理論の時であると思われる。そのような観点から、工学である本講義では、多くの場合、角度を「度」で表すことを「強制」するので、ご理解頂きたい。

事後学習内容確認事項

A. インピーダンス

1. 回路素子のインピーダンス

抵抗 $R = 1\ \Omega$, コイル $L = 1\ \text{mH}$, コンデンサ $C = 500\ \mu\text{F}$ があるとき, それぞれの回路素子のインピーダンスを求めよ. 交流電圧・電流の周波数は $\omega = 1000\ \text{rad/s}$ とする. 有効数字 2 桁で答えよ.

略解

抵抗 R のインピーダンスは,

$$R = 1.0\ \Omega$$

となる.

コイル L のインピーダンスは,

$$\begin{aligned} j\omega L &= j(1000) \times (1 \times 10^{-3}) \\ &= j\ 1.0\ \Omega \end{aligned}$$

となる.

コンデンサ C のインピーダンスは,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega C} &= -j \frac{1}{(1000) \times (500 \times 10^{-6})} \\ &= -j\ 2.0\ \Omega \end{aligned}$$

となる.

2. 直列回路のインピーダンス

R, L, C の直列合成インピーダンス Z を求め, 直角座標形式と極座標形式で表せ. 有効数字 2 桁で表せ. Z を複素平面上で図示せよ.

略解

直角座標形式では,

$$Z = (1.0 - j1.0)\ \Omega$$

となる.

極座標形式では,

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2} \angle -45^\circ \\ &= (1.4 \angle -45^\circ)\ \Omega \end{aligned}$$

となる.

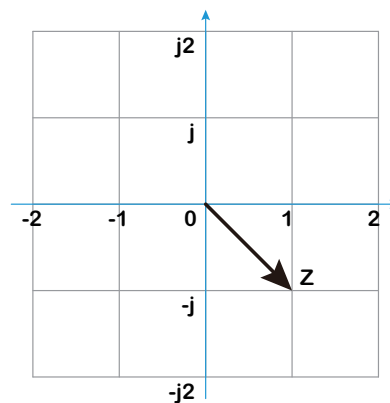


図 4.16 抵抗 $R = 1\ \Omega$, コイル $L = 1\ \text{mH}$, コンデンサ $C = 500\ \mu\text{F}$ の直列回路の周波数 $\omega = 1000\ \text{rad/s}$ のときのインピーダンス Z .

このインピーダンス Z を図示すると, 図 4.16 のようになる.

3. フェーザと波形の対応関係

上記の Z に印加する電圧波形の振幅を $V_m = 2.0\ \text{V}$, 周波数を $\omega = 1000\ \text{rad/s}$ とするとき, Z にかかる電圧と電流をフェーザ形式で表したときの関係を複素平面上に描け (実効値と位相の情報が必要). それを基にして, 電圧と電流の波形の関係を描け (振幅と位相の情報が必要).

略解

波形をフェーザ形式で表したとき,

$$\text{絶対値} = \text{実効値} = \frac{\text{振幅}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{偏角} = \text{初期位相} = \text{指定なしならばゼロ}$$

である. 従って, フェーザ形式で表した電圧 V は,

$$\begin{aligned} \text{実効値 } V_e &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ &= 1.4\ \text{V} \end{aligned}$$

より,

$$V = \sqrt{2} \angle 0^\circ = (1.4 \angle 0.0^\circ)\ \text{V}$$

となる.

一方, $Z = (\sqrt{2} \angle -45^\circ)\ \Omega$ であるから, オームの法則により,

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{\sqrt{2} \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle -45^\circ} = (1.0 \angle 45^\circ)\ \text{A}$$

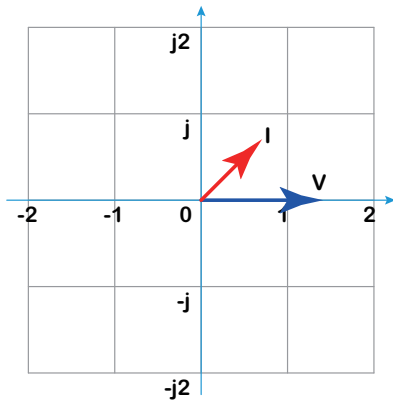


図 4.17 抵抗 $R = 1 \Omega$, コイル $L = 1 \text{ mH}$, コンデンサ $C = 500 \mu\text{F}$ の直列回路に周波数 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, 振幅 $V_m = 2 \text{ V}$ の交流電圧を印加したときの電圧と電流のフェーザの関係.

となる.

冗長だが, 学習のために以上をまとめると,

$$\begin{aligned}
 \text{フェーザ形式の電圧 } V &= (1.4 \angle 0.0^\circ) \text{ V}, \\
 \text{フェーザ形式の電流 } I &= (1.0 \angle 45^\circ) \text{ A}, \\
 \text{電圧の実効値 } V_e = |V| &= 1.4 \text{ V}, \\
 \text{電圧の振幅 } V_m = \sqrt{2}V_e &= 2.0 \text{ V}, \\
 \text{電圧の初期位相 } \theta &= 0^\circ, \\
 \text{電流の実効値 } I_e = |I| &= 1.0 \text{ A}, \\
 \text{電流の振幅 } I_m = \sqrt{2}I_e &= 1.4 \text{ A}, \\
 \text{電流の初期位相 } \phi &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

となる.

フェーザ形式の電圧と電流を複素平面上に描けば, 図

4.17 のようになる.

電圧と電流のフェーザと波形の関係は,

$$\begin{aligned}
 V = V_e \angle \theta &\iff v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta), \\
 I = I_e \angle \phi &\iff i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

であるから, 電圧波形と電流波形の関係は, 図 4.18 のようになる.

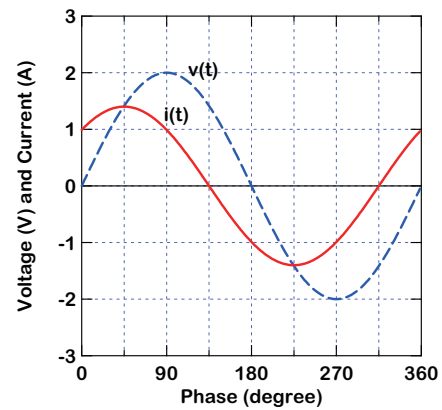


図 4.18 抵抗 $R = 1 \Omega$, コイル $L = 1 \text{ mH}$, コンデンサ $C = 500 \mu\text{F}$ の直列回路に周波数 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, 振幅 $V_m = 2 \text{ V}$ の交流電圧を印加したときの電圧と電流の波形.

B. アドミタンス

1. 回路素子のアドミタンス

抵抗 $R = 1 \Omega$, コイル $L = 0.5 \text{ mH}$, コンデンサ $C = 1000 \mu\text{F}$ があるとき, それぞれの回路素子のアドミタンスを求めよ. 交流電圧・電流の周波数は $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ とする. 有効数字 2 桁で答えよ.

略解

抵抗 R のアドミタンスは,

$$\frac{1}{R} = 1.0 \text{ S}$$

となる.

コイル L のアドミタンスは,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega L} &= -j \frac{1}{(1000) \times (0.5 \times 10^{-3})} \\ &= -j 2.0 \text{ S} \end{aligned}$$

となる.

コンデンサ C のアドミタンスは,

$$\begin{aligned} j\omega C &= j (1000) \times (1000 \times 10^{-6}) \\ &= j 1.0 \text{ S} \end{aligned}$$

となる.

2. 並列回路のアドミタンス

R, L, C の並列合成インピーダンス Y を求め, 直角座標形式と極座標形式で表せ. Y を複素平面上で図示せよ.

略解

直角座標形式では,

$$Y = (1.0 - j1.0) \text{ S}$$

となる.

極座標形式では,

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{2} \angle -45^\circ \\ &= (1.4 \angle -45^\circ) \text{ S} \end{aligned}$$

となる.

このアドミタンス Y を複素平面上で表せば, 図 4.19 のようになる.

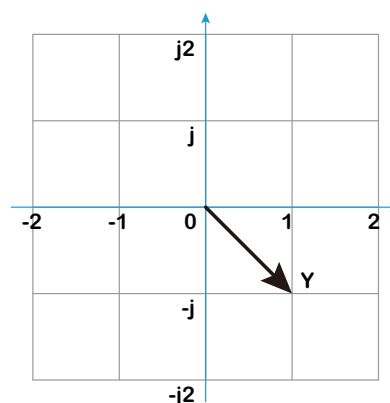


図 4.19 抵抗 $R = 1 \Omega$, コイル $L = 0.5 \text{ mH}$, コンデンサ $C = 1000 \mu\text{F}$ の並列回路の周波数 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ におけるアドミタンス Y .

3. フェーザと波形の対応関係

上記の Y に印加する電圧波形の振幅を $V_m = 2.0 \text{ V}$, 周波数を $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ とするとき, Y にかかる電圧と電流をフェーザ形式で表したときの関係を複素平面上に描け (実効値と位相の情報が必要). それを基にして, 電圧と電流の波形の関係を描け (振幅と位相の情報が必要).

略解

波形をフェーザ形式で表したとき,

$$\text{絶対値} = \text{実効値} = \frac{\text{振幅}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{偏角} = \text{初期位相} = \text{指定なしならばゼロ}$$

である. 従って, フェーザ形式で表した電圧 V は,

$$\begin{aligned} \text{実効値 } V_e &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ &= 1.4 \text{ V} \end{aligned}$$

より,

$$V = \sqrt{2} \angle 0^\circ = (1.4 \angle 0.0^\circ) \text{ V}$$

となる.

一方, $Y = (\sqrt{2} \angle -45^\circ) \text{ S}$ であるから, オームの法則により,

$$I = \frac{V}{Z} = VY = (\sqrt{2} \angle 0^\circ) (\sqrt{2} \angle -45^\circ) = (2.0 \angle -45^\circ) \text{ A}$$

となる.

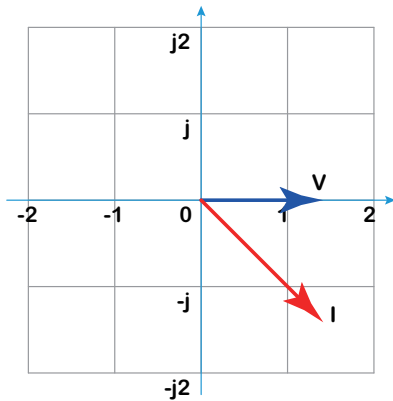


図 4.20 抵抗 $R = 1 \Omega$ ，コイル $L = 0.5 \text{ mH}$ ，コンデンサ $C = 1000 \mu\text{F}$ の並列回路に，周波数 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ，振幅 $V_m = 2.0 \text{ V}$ の交流電圧を印加したときの電圧と電流のフェーザの関係。

冗長だが，学習のために以上をまとめると，

$$\begin{aligned}
 \text{フェーザ形式の電圧 } V &= (1.4 \angle 0.0^\circ) \text{ V}, \\
 \text{フェーザ形式の電流 } I &= (1.0 \angle 45^\circ) \text{ A}, \\
 \text{電圧の実効値 } V_e = |V| &= 1.4 \text{ V}, \\
 \text{電圧の振幅 } V_m = \sqrt{2}V_e &= 2.0 \text{ V}, \\
 \text{電圧の初期位相 } \theta &= 0^\circ, \\
 \text{電流の実効値 } I_e = |I| &= 2.0 \text{ A}, \\
 \text{電流の振幅 } I_m = \sqrt{2}I_e &= 2.8 \text{ A}, \\
 \text{電流の初期位相 } \phi &= -45^\circ
 \end{aligned}$$

となる。

フェーザ形式の電圧と電流を複素平面上に描けば，図 4.20 のようになる。

電圧と電流のフェーザと波形の関係は，

$$\begin{aligned}
 V = V_e \angle \theta &\iff v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta), \\
 I = I_e \angle \phi &\iff i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

であるから，電圧波形と電流波形の関係は，図 4.21 のようになる。

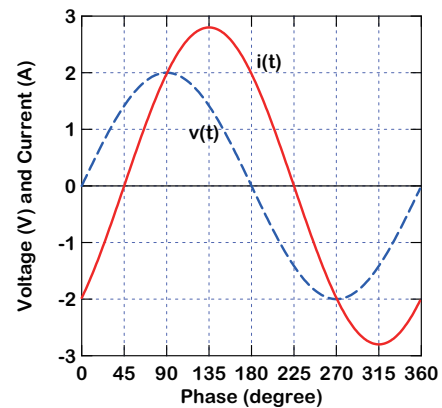


図 4.21 抵抗 $R = 1 \Omega$ ，コイル $L = 0.5 \text{ mH}$ ，コンデンサ $C = 1000 \mu\text{F}$ の並列回路に周波数 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ，振幅 $V_m = 2 \text{ V}$ の交流電圧を印加したときの電圧と電流の波形。