第 5 章

交流回路の直並列接続

本章では，以下のことを身につけることを目的とする．

5 つの「できる」

- Z と Y の計算
- 複素平面上の Z と Y の図示
- フェーザを用いた交流回路の計算
- 複素平面上のフェーザの図示
- フェーザと実関数（波形）との対応

4 つの「知っている」

移相回路，等価回路，

ブリッジ回路，共振回路

5.1　直並列回路

本節では，幾つかの直列回路，並列回路について，合成インピーダンスを表す式を示し，その複素平面上での描像を示す．また，フェーザ形式で表した場合の電圧と電流の複素平面上での描像を示す．これらの事例に触れることで「フェーザ」と「インピーダンス」という概念に慣れてもらいたい．

5.1.1　RC 直列回路

図 5.1 に示すような抵抗 R とコンデンサ C の直列回路の合成インピーダンス Z は次式で表される．

$$Z = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}. \tag{5.1}$$

ここで，Z の大きさ $|Z|$ と偏角 $\arg Z$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{5.2}$$

$$\arg Z = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right). \tag{5.3}$$

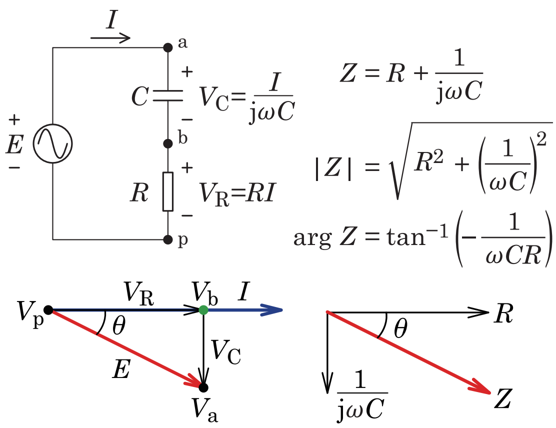

図 5.1 RC 直列回路図とそのインピーダンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，インピーダンスの複素平面上での描像．

5.1.2　RC 並列回路

図 5.2 に示すような抵抗 R とコンデンサ C の並列回路の合成アドミタンス Y は次式で表される．並列の場合は，アドミタンスで扱った方が式がシンプルになる（見通しがよい，などという）ので，アドミタンスで表しているが，必要ならばインピーダンスで表してもかまわない．

$$Y = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C. \tag{5.4}$$

ここで，Y の大きさ $|Y|$ と偏角 $\arg Y$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}, \tag{5.5}$$

$$\arg Y = \tan^{-1}(\omega CR). \tag{5.6}$$

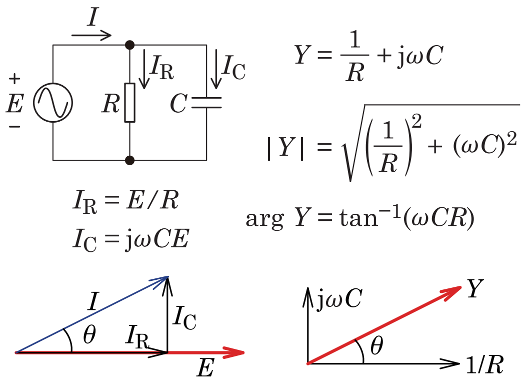

図 5.2 RC 並列回路図とそのアドミタンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，アドミタンスの複素平面上での描像.

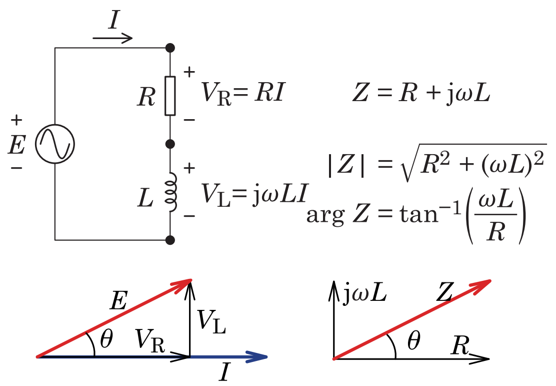

図 5.3 RL 直列回路図とそのインピーダンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，インピーダンスの複素平面上での描像.

5.1.3　RL 直列回路

図 5.3 に示すような抵抗 R とコイル L の直列回路の合成インピーダンス Z は次式で表される.

$$Z=R+\mathrm{j}\omega L. \tag{5.7}$$

ここで，Z の大きさ $|Z|$ と偏角 $\arg Z$ は次式で表される.なお，図中では偏角を θ と表記した.

$$|Z|=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}, \tag{5.8}$$

$$\arg Z=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \tag{5.9}$$

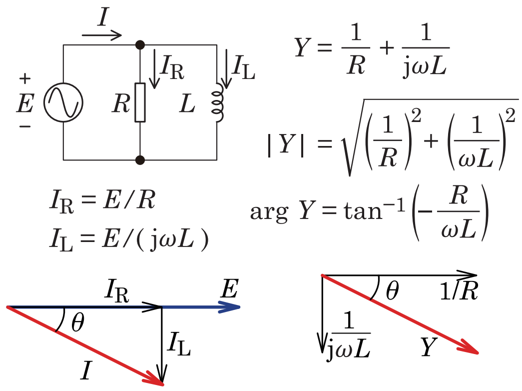

図 5.4 RL 並列回路図とそのアドミタンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，アドミタンスの複素平面上での描像.

5.1.4　RL 並列回路

図 5.4 に示すような抵抗 R とコイル L の並列回路の合成アドミタンス Y は次式で表される.並列の場合は，アドミタンスで扱った方が式がシンプルになる（見通しがよい，などという）ので，アドミタンスで表しているが，必要ならばインピーダンスで表してもかまわない.

$$Y=\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=\frac{1}{R}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}. \tag{5.10}$$

ここで，Y の大きさ $|Y|$ と偏角 $\arg Y$ は次式で表される.なお，図中では偏角を θ と表記した.

$$|Y|=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}, \tag{5.11}$$

$$\arg Y=\tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right). \tag{5.12}$$

5.2　つなぎ方に関する留意事項

図 5.5 は，R と C を接続する順番が異なる二つの RC 直列回路である.合成インピーダンス，回路全体に流れる電流 I と電源電圧 E の関係は，どちらも全く同じである.また，R だけに注目したときの R の端子間の電圧 V_{R} と R に流れる電流 I も，二つの回路で比較しても差異はない.また，C だけに注目したときの C の端子間の電圧 V_{C} と C に流れる電流 I についても，同様に，差異が無い.

これら二つの回路は等価とみてよいのだろうか？

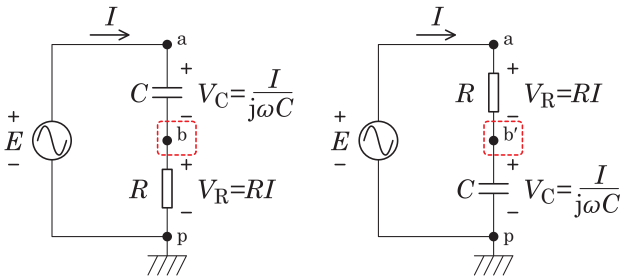

図 5.5 CR 直列回路と RC 直列回路．どちらも合成インピーダンスは同じであるが，p を接地電位 (= 0 V) とした場合の b と b′ の電位が異なる．

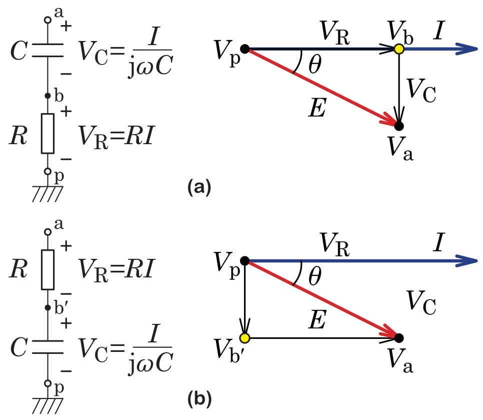

図 5.6 R と C の接続順番が異なる二つの回路の電圧と電流のフェーザ図．

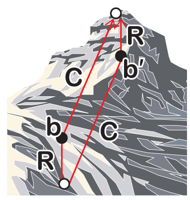

図 5.7 異なる素子を通って電位勾配を登ることを，異なる経路で山を登ることに例えると，イメージとしてはこんな感じである．通る経路がことなると，到達地点の高さは同じだが，途中の高さが異なる．

答えはこの回路の何処に注目しているかで異なる．

p と a の端子間しか問題にしないのであれば，等価である．しかし，b や b′ も考慮する場合には，等価ではない[*1]．これは，p を基準としたときの b の電位 V_{bp} と，p を基準としたときの b′ の電位 $V_{\mathrm{b'p}}$ が異なるからである．以下では，V_{bp} と $V_{\mathrm{b'p}}$ がどのように異なるのか，について説明する．

まず，説明のための前準備を行う．前の段落にて，何の説明もなく V_{bp} や $V_{\mathrm{b'p}}$ という書き方をしたが，二つの添え字で二点間の電圧やある点から見た「電位」を表すときのルールを定めておく．V_{bp} とは，「p から b を見たときの電圧（電位差）」，もしくは，「b の電位（但し，p を基準としてますよ）」である．従って，添え字の順番を逆にすると符号が変わるので留意すること[*2]．

図 5.6(a) と**図 5.6**(b) は，R と C の接続順番が異なる二つの回路の電圧と電流のフェーザ図である．説明をし易くするために，電流 I が複素平面上で水平になるような電圧が印加されているものとする．(a) と (b) のどちらの場合も，R と C を個別に抜き出して考えた場合の電圧と電流の関係は同じであり，次式のようになる．

$$V_{\mathrm{R}} = RI, \tag{5.13}$$

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I. \tag{5.14}$$

以上で，前準備は終わりである．ここから説明の本論に入る．ある節点を基準としてそこから回路に沿って別の節点に移動するとき，回路素子と出会う順番が異なると，途中の電位が異なってくる，というのが説明の要点である．山登りに例えれば，**図 5.7** のように，山頂に向けて坂道を登るときに，異なる経路をたどると，最終的に到達する山頂の高さは同じであるが，途中の高さが異なる，というようなイメージである．これを複素平面上にフェーザ形式の電圧と電流を描くことで説明する．

図 5.6(a) の場合も**図 5.6**(b) の場合も，p から a に向かって電位勾配を登っていくと，最終的に到達する a の電位 V_{ap} は，どちらの場合も同じである (同じ山の頂上に到達する)．しかし，**図 5.6**(a) の場合には，p から登っていくときに最初に通る回路素子が抵抗 R であるのに対し，**図 5.6**(b) の場合には，最初に通る回路素子はコンデンサ C である．抵抗 R における電位勾配が式 (5.13) で与えられるのに対し，コンデンサ C における電位勾配は式 (5.14) で与えられ，抵抗の場合と異なる．従って，b と b′ の電位が異なるのである．どのように異なるか

[*1] b や b′ を考慮する具体的な例としては，例えば，後で b（或いは b′）に何かを接続して使う場合などである．

[*2] 坂の勾配を言うときに，同じ勾配であっても，坂の上から見れば，その勾配は「下り坂」になるが，坂の下から見れば，その勾配は「上り坂」である，というのと同じである．

を見てみよう．

図 5.6(a) の場合には，p から b に向かうときに感じる電位勾配は，$V_{\mathrm{bp}} = V_{\mathrm{R}}$ である．抵抗では電圧と電流の間に位相差が生じないので，複素平面上で表したフェーザ形式の電流 I と V_{bp} は，電流が描かれている軸と同じ軸上に描かれることになる．一方，**図 5.6**(b) の場合には，p から b′ に向かうときに感じる電位勾配は，$V_{\mathrm{b'p}} = V_{\mathrm{C}}$ である．コンデンサでは電流に対して電流の位相が 90° 遅れるので，複素平面上で表したフェーザ形式の電流 I と $V_{\mathrm{b'p}}$ は，電流が描かれている軸に対して −90° だけ回転した方向に描かれることになる．

以上をまとめると，以下のようになる．

> **複数の回路素子を接続する場合，接続の順番が異なっていても，合成インピーダンスに違いは無いが，回路素子同士を接続している節点の電位が異なる**

このことをうまく利用すると，節点の電位の大きさは変えずに，位相だけを変える，という回路が出来る．これを移相回路という．以下の節では，このような特定の用途のために「うまい具合に作った回路」を紹介する．

5.3　移相回路 (その 1)

移相回路 (phase-shifter) の回路図を**図 5.8** に示す．R の値や ωC の値によって E に対する V の位相が変わる回路である．各部の電圧をフェーザ形式で表し，複素平面上で描くと，**図 5.9** のようになる．V_{R} と V_{C} が変わっても，p に対する b の電位 V_{bp} と p に対する b′ の電位 $V_{\mathrm{b'}}$ が補助線として描いた円周上を動くだけとなる．従って，$|V| = |V_{\mathrm{bp}} - V_{\mathrm{b'p}}| = |E|$ となり，$|V|$ の絶対値は変化せず，E に対する V の角度（即ち，E に対する V の位相）だけが変化する．

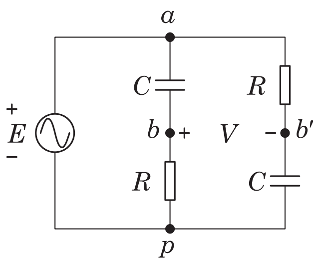

図 5.8 移相回路 (Phase-Shifter) の回路図．

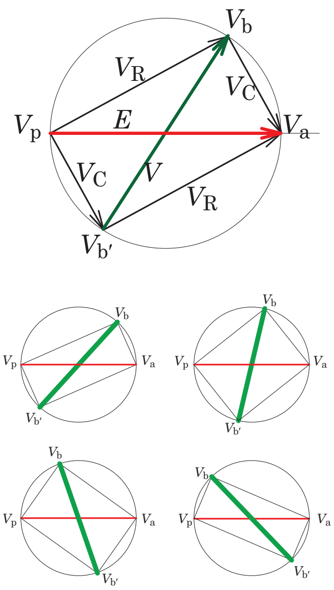

図 5.9 移相回路のフェーザ・ダイヤグラム．

5.4　移相回路 (その 2)

図 5.10 は，先の移相回路のマイナーチェンジ版である．動作機構は同じであるが，V_{bo} の大きさ (絶対値) が $|E|$ ではなく $|E|/2$ になる点が異なる．

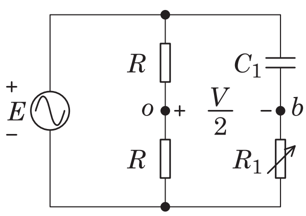

図 5.10 移相回路 (その 2) の回路図．

V_{bo} の絶対値が E の半分になることは，以下の式にて説明される．

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{bo}} &= \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} E - \frac{E}{2} \\
&= \frac{R_1 - \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} \frac{E}{2} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega C_1 R_1 - 1}{\mathrm{j}\omega C_1 R_1 + 1} \frac{E}{2}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

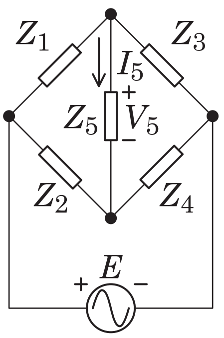

図 5.11 ブリッジ回路.

これより,

$$|V_{\mathrm{bo}}| = \frac{|E|}{2} \tag{5.16}$$

となる.

5.5 ブリッジ回路

図 5.11 のような回路をブリッジ回路という．Z_5 を流れる電流がゼロの状態（これを平衡状態という）になるように Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 を調節する．平衡状態になる条件は，次式で与えられる．

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \tag{5.17}$$

こんな回路を作って何が嬉しいのか？

ブリッジ回路は，ブリッジ回路の１～４のインピーダンスの内，どれか一つが未知のインピーダンスであるときに，残りの３つのインピーダンスが正確にわかっていれば，その未知のインピーダンスを算出することができる．抵抗，インダクタンス，更には，印加されている交流電圧の周波数を測定する回路として，ホイートストンブリッジ (Wheatstone bridge)，マクスウェルブリッジ (Maxwell bridge)，ウィーンブリッジ (Wien bridge) が知られている．他にも様々なブリッジが存在するが，本章では，これら三つのブリッジを紹介する．（適宜更新する予定）

5.5.1 ホイートストンブリッジ

図 5.12 はホイートストンブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．このブリッジの目的は，抵抗測定である．平衡条件式は,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{5.18}$$

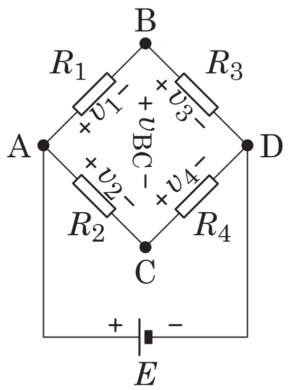

図 5.12 未知の抵抗値を高精度で求めるためのホイートストンブリッジ.

である．R_1 が未知の抵抗であるとするとき，平衡条件を満たす R_2，R_3，R_4 が高精度でわかっていれば，平衡式の変形版である

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2 \tag{5.19}$$

によって，R_1 を高精度で決定出来る，というのがこのブリッジの御利益である．

課題

ホイートストンブリッジの平衡条件を導出せよ

略解

図 5.12 の v_3 と v_4 は，二つの抵抗で電圧を分割したときの電圧に相当するから，次式で与えられる．

$$v_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E, \tag{5.20}$$

$$v_4 = \frac{R_4}{R_2 + R_4} E. \tag{5.21}$$

これらを使って，v_{BC} を表すと，以下のようになる．

$$v_{\mathrm{BC}} = v_3 - v_4. \tag{5.22}$$

平衡条件の $v_{\mathrm{BC}} = 0$ を満たすとすると，次式が成り立つ．

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 0. \tag{5.23}$$

この式を変形すれば，以下の平衡条件の式となる．

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{5.24}$$

この平衡条件は，この形にする必要性は全くない．$R_1 R_4 = R_2 R_3$ と書いても何の問題も無い．ただ，覚

図 **5.13** 275597 携帯用ホイートストンブリッジ (横河メータ& インスツルメンツ株式会社) [1]．1 Ω〜10 MΩ までの広範囲を測定可能 (有効数字 4 桁).

えやすいように，ブリッジ回路図の中での R_i の配置と式の中の R_i の配置が同様になる式が好んで紹介の時に書かれるようである．

豆知識

実際に売られているホイートストンブリッジの実物写真を**図 5.13** に示す [1]．$R_1 = \mathrm{A.BCD} \times 10^{\mathrm{E}}\ \Omega$ とした場合，四つのダイヤルが R_1 の有効数字部分を決定するダイヤルであり，$R_2 = \mathrm{A.BCD}$ の桁の 1 桁目 A，2 桁目 B，3 桁目 C，4 桁目 D を設定するつまみと考えればよい．左上のつまみは，R_3/R_4 の設定つまみに相当し，R_1 を上のように表したときの E を設定することに相当する．これにより，抵抗 R_1 の値を，有効数字 4 桁の $R_1 = \mathrm{A.BCD} \times 10^{\mathrm{E}}\ \Omega$ という形で計測することができるのである．左下のメーターは，節点 B と C の間に電流が流れない (即ち，同電位の) 状態になっているかどうかを見るための検流計である．

5.5.2　ウィーンブリッジ

図 5.14 はウィーンブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．このブリッジの目的は周波数測定である．平衡条件式は，

$$\omega = \frac{1}{R_3 C_3} \tag{5.25}$$

である．但し，$R_1 = 2R_2$，$R_3 = R_4$，$C_3 = C_4$ という条件を満たすものとする．

課題

ウィーンブリッジの平衡条件を導出せよ

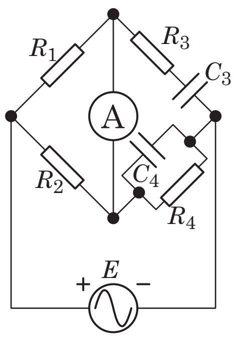

図 **5.14** 周波数を回路素子定数から求めるためのウィーンブリッジ．

略解

平衡条件を単純に書き下すと次式のようになる．

$$\left(R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}\right)\left(\frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4\right) = \frac{R_1}{R_2}. \tag{5.26}$$

これを平衡条件がわかりやすい以下のような形式に式変形する．

$$\frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3} + \mathrm{j}\left(\omega R_3 C_4 - \frac{1}{\omega R_4 C_3}\right) = \frac{R_1}{R_2}. \tag{5.27}$$

左辺と右辺の実部と虚部がそれぞれ等しい，という条件から，

$$\frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{5.28}$$

$$\omega R_3 C_4 = \frac{1}{\omega R_4 C_3} \tag{5.29}$$

となる．ここで，$R_1 = 2R_2$，$R_3 = R_4$，$C_3 = C_4$ の但し書きを利用すると，

$$\omega = \frac{1}{R_3 C_3} \tag{5.30}$$

となり，R_3 と C_3 から周波数 ω が求められることがわかる．

5.5.3　マクスウェルブリッジ

図 5.15 はマクスウェルブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．実体写真は，**図 5.16** に示すようなものである [2]．抵抗 R_2，R_3，R_4 とコンデンサ C_4 を利用して，未知の誘導性インピーダンス $Z = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1$ の抵抗成分 R_1 とインダクタンス L_1 を求めるために使用される．用いている交流電源の周波数 ω の情報が必要ないことが特徴である．

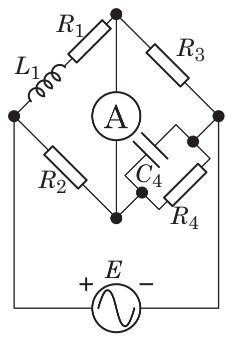

図 5.15 誘導性インピーダンスを求めるために用いられるマクスウェルブリッジ.

図 5.16 マクスウェルブリッジ [2].

課題

マクスウェルブリッジの平衡条件を導出せよ

略解

平衡条件の式を書き下すと，かなり複雑だが，以下のようになる．

$$\frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{\dfrac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4} = R_2 R_3, \tag{5.31}$$

$$\frac{R_1 R_4 + \mathrm{j}\omega L_1 R_4}{1 + \mathrm{j}\omega C_4 R_4} = R_2 R_3. \tag{5.32}$$

従って，

$$R_1 R_4 + \mathrm{j}\omega L_1 R_4 = R_2 R_3 (1 + \mathrm{j}\omega C_4 R_4). \tag{5.33}$$

これより，

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}, \tag{5.34}$$

$$L_1 = C_4 R_2 R_3 \tag{5.35}$$

となり，R_1 と L_1 が R_2，R_3，R_4，C_4 から求められることがわかる．

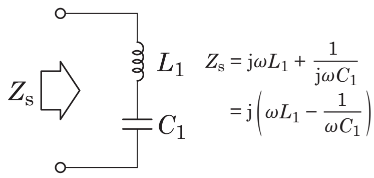

図 5.17 LC 直列回路.

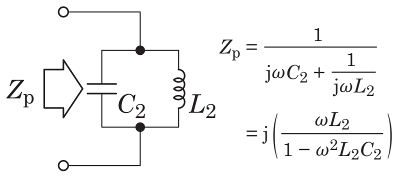

図 5.18 LC 並列回路.

5.6 共振回路

図 5.17 と**図 5.18** は，それぞれ，LC 直列回路，LC 並列回路である．コイル L とコンデンサ C で構成される回路要素は，インピーダンスの大きさがある周波数でゼロになる，あるいは，ある周波数で無限大になる，という特性を持つ．このような特性を「共振特性」という．

図 5.17 に示した LC 直列回路の場合には，合成インピーダンス Z_s は，

$$\begin{aligned} Z_s &= \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} \\ &= \mathrm{j}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

となり，() 内がある特定の周波数の時にゼロになることがわかる．

図 5.18 に示した LC 並列回路の場合には，合成インピーダンス Z_p は，

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L_2}} \\ &= \mathrm{j}\left(\frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

となり，() 内がある特定の周波数の時に無限大になることがわかる．

図 5.17 に示した LC 直列回路と**図 5.18** に示した LC 並列回路のインピーダンスは，虚部しか持たないため，インピーダンスはリアクタンス成分だけを持っていることになる．

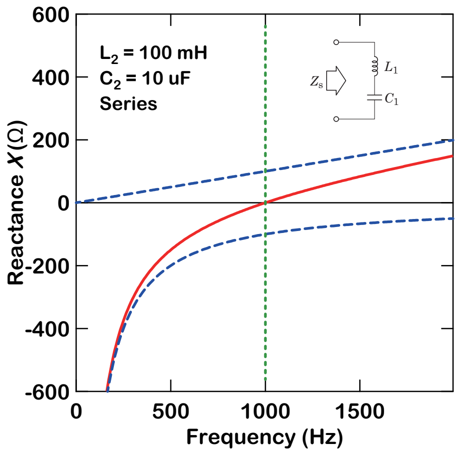

図 5.19 LC 直列回路の周波数特性.

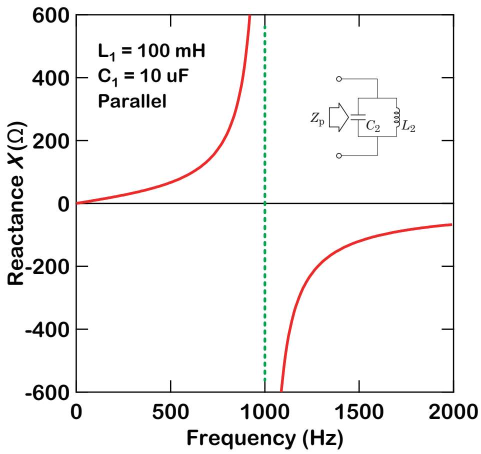

図 5.20 LC 並列回路の周波数特性.

図 5.19，**図 5.20** は，$L_1 = 100$ mH，$C_1 = 10\ \mu$F，$L_2 = 100$ mH，$C_2 = 10\ \mu$ F として Z_S，Z_P を計算し，それぞれのリアクタンス成分の大きさの周波数特性を図示したものである．このような特性全体を「共振特性」と言う．また，この特性の場合，ちょうど $f = 1$ kHz の時にリアクタンス成分がゼロ，または，無限大になっている．そのような周波数を「共振周波数」という．そのような周波数に設定されている状態を「共振している」というコトバで表現する．「共振」については，別途，章を改めて詳しく説明する．

5.7 計算練習 (その 1) RC 直列回路

図 5.21 に示した回路について, 以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin \omega t$ で表され，$E_{\mathrm{m}} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．また，$C = 10\ \mu$F，$R = 10\ \Omega$ とする．有効数字は 3 桁とする[*3]．

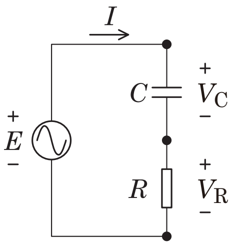

図 5.21 計算練習用の RC 直列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. C と R の合成インピーダンス Z を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. C にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{C} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{R} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. E，V_{C}，V_{R} の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Z，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ に対応するフェーザ表記が $E = \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のように表される.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = 10\angle 0^\circ \\
&= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

略解 2

この場合の合成インピーダンス Z を表す式は,

$$
Z = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}
$$

である．従って，Z は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
Z &= 10 + \frac{1}{j(5000) \times (10 \times 10^{-6})} \\
&= 10 - \mathrm{j}\frac{1}{5 \times 10^3 \times 10^{-5}} \\
&= 10 - \mathrm{j}\frac{1}{5 \times 10^{-2}} = 10 - \mathrm{j}0.2 \times 10^2 \\
&= 10 - \mathrm{j}20 = 22.36\angle -63.43^\circ \\
&= (22.4\angle -63.4^\circ)\ \Omega.
\end{aligned}
$$

略解 3

オームの法則 $I = E/Z$ において，$E = (10\angle 0^\circ)$ V，$Z = (22.36\angle -63.43^\circ)\ \Omega$ であるから, I は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{E}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{22.36\angle -63.43^\circ} \\
&= \frac{10}{22.36}\angle 63.43^\circ = 0.4472\angle 63.43^\circ \\
&= (0.447\angle 63.4^\circ)\ \mathrm{A}. \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

略解 4

C のインピーダンスを Z_{C} とすると，オームの法則より，C にかかる電圧は $V_{\mathrm{C}} = Z_{\mathrm{C}} I$ で求められる．Z_{C} は,

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}5000 \times 10 \times 10^{-6}} = -\mathrm{j}20 \\
&= (20.0\angle -90.0^\circ)\ \Omega
\end{aligned}
$$

となる．従って，V_{C} は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{C}} &= Z_{\mathrm{C}} I \\
&= (20\angle -90^\circ) \times (0.4472\angle 63.43^\circ) \\
&= 8.944\angle -26.57^\circ \\
&= (8.94\angle -26.6^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

[*3] 問題の中の数値に $\sqrt{2}$ が入っていたり，5000 なる表記が含まれており，有効数字 3 桁の数値表現法に従っていないが，解答の際にこれらの数値を使う場合には，有効数字 3 桁の数値として扱って欲しい．以降の問題も同様.

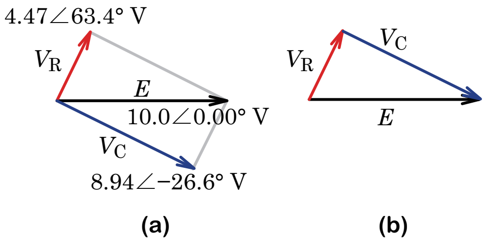

図 5.22 計算練習用の RC 直列回路の電圧 (フェーザ) の複素平面上での関係．(a) 節点間の電位差のみを考慮した作図例．(b) 節点の電位を考慮した作図例．

略解 5

オームの法則より，R にかかる電圧は $V_R = RI$ で求められる．従って，V_R は以下のようになる．

$$\begin{aligned} V_R &= Z_R I = 10 \times 0.4472\angle 63.43^\circ \\ &= 4.472\angle 63.43^\circ \\ &= (4.47\angle 63.4^\circ)\ \text{V}. \end{aligned}$$

略解 6

これまでに得た E，V_C，V_R は以下の通りである．

$$\begin{aligned} E &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \text{V}, \\ V_C &= (8.94\angle -26.6^\circ)\ \text{V}, \\ V_R &= (4.47\angle 63.4^\circ)\ \text{V}. \end{aligned}$$

$E = V_C + V_R$ に留意して，これらの関係を複素平面上で図示すれば，**図 5.22** のようになる．

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している．

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (0.4472\angle 63.43^\circ)$ A であったから，振幅 I_m と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる．

$$I_m = 0.4472 \times \sqrt{2} = 0.632\ \text{A}, \qquad \phi = 63.4^\circ$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる．

$$i(t) = 0.632 \sin(\omega t + 63.4^\circ)\ \text{A}.$$

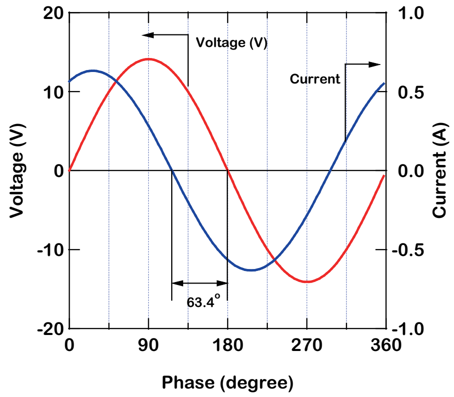

図 5.23 計算練習用の RC 直列回路の電圧波形と電流波形の関係．

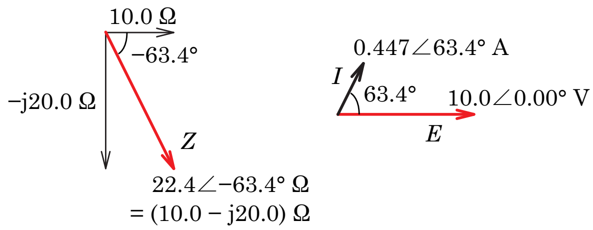

図 5.24 計算練習用の RC 直列回路の Z，E，I の関係．

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである．

$$\begin{aligned} e(t) &= 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t\ \text{V}, \\ i(t) &= 0.632\sin(\omega t + 63.4^\circ)\ \text{A}. \end{aligned}$$

これらを図示すると，**図 5.23** に示すような波形となる．

略解 9

インピーダンス Z，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである．

$$\begin{aligned} Z &= 10.0 - \text{j}20.0 = (22.4\angle -63.4^\circ)\ \Omega, \\ E &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \text{V}, \\ I &= (0.447\angle 63.4^\circ)\ \text{A}. \end{aligned}$$

これらを図示すれば，**図 5.24** のようになる．

5.8 計算練習 (その 2) RC 並列回路

図 5.25 に示した回路について, 以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t)=E_\mathrm{m}\sin\omega t$ で表され，$E_\mathrm{m}=10\sqrt{2}$ V，$\omega=5000$ rad/s とする．また，$C=100$ μF，$R=10$ Ω とする．有効数字は 3 桁とする．

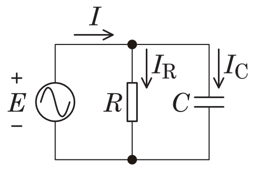

図 5.25 計算練習用の RC 並列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. C と R の合成アドミタンス Y を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. C に流れる電流 (フェーザ形式)I_C を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R に流れる電流 (フェーザ形式)I_R を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. I，I_C，I_R の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Y，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t)=E_\mathrm{m}\sin(\omega t+\theta)$ に対応するフェーザ表記が $E=\frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は以下のように表される.

$$E=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ=(10.0\angle 0.00^\circ)\ \text{V}.$$

略解 2

この場合の合成アドミタンス Y を表す式は,

$$Y=\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C$$

である．従って，Y は以下のようになる.

$$\begin{aligned}Y&=\frac{1}{10}+\mathrm{j}(5000)\times(100\times10^{-6})\\&=0.1+\mathrm{j}5\times10^{3}\times10^{-4}\\&=0.1+\mathrm{j}0.5\\&=0.5099\angle 78.69^\circ\\&=(0.510\angle 78.7^\circ)\ \text{S}.\end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I=YE$ において，$E=(10\angle 0^\circ)$ V，$Y=(0.5099\angle 78.69^\circ)$ S であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I=YE&=(0.5099\angle 78.69^\circ)\times(10\angle 0^\circ)\\&=5.099\angle 78.69^\circ\\&=(5.10\angle 78.7^\circ)\ \text{A}.\end{aligned}$$

略解 4

C のアドミタンスを Y_C とすると，オームの法則より，C に流れる電流は，$I_\mathrm{C}=Y_\mathrm{C}E$ で求められる．Y_C は,

$$\begin{aligned}Y_\mathrm{C}&=\mathrm{j}\omega C\\&=\mathrm{j}5000\times100\times10^{-6}=\mathrm{j}0.5\\&=(0.500\angle 90.0^\circ)\ \text{S}.\end{aligned}$$

従って，I_C は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_\mathrm{C}&=Y_\mathrm{C}E\\&=(0.5\angle 90^\circ)\times(10\angle 0^\circ)\\&=(5.00\angle 90.0^\circ)\ \text{A}.\end{aligned}\tag{5.39}$$

略解 5

オームの法則より，R に流れる電流は $I_\mathrm{R}=E/R$ で求められる．従って，I_R は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_\mathrm{R}&=\frac{E}{R}=\frac{10\angle 0^\circ}{10}\\&=(1.00\angle 0.00^\circ)\ \text{A}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

略解 6

これまでに得た I，I_C，I_R は以下の通りである.

$$\begin{aligned}I&=(1.00+\mathrm{j}5.00)=(5.10\angle 78.7^\circ)\ \text{A},\\I_\mathrm{C}&=\mathrm{j}5.00=(5.00\angle 90.0^\circ)\ \text{A},\\I_\mathrm{R}&=1.00=(1.00\angle 0.00)\ \text{A}.\end{aligned}$$

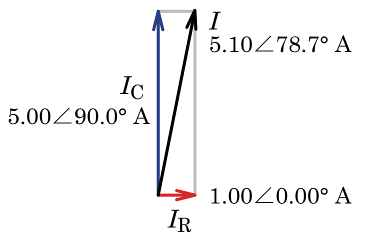

図 5.26 計算練習用の RC 並列回路の電流 (フェーザ) の複素平面上での関係.

$I = I_R + I_C$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.26** のようになる.

略解 7

フェーザ形式で表した電流;

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (5.099\angle 78.69^\circ)$ A であったから，振幅 I_m と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_m = 5.099\sqrt{2} = 7.21 \text{ A}, \quad \phi = 78.7^\circ.$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる.

$$i(t) = 7.21 \sin(\omega t + 78.7^\circ) \ \text{A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin\omega t = 14.1 \sin\omega t \ \text{V},$$
$$i(t) = 7.21 \sin(\omega t + 78.7^\circ) \ \text{A}.$$

これらを図示すると，**図 5.27** のようになる.

略解 9

アドミタンス Y，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである.

$$Y = (0.100 + \text{j}0.500) = (0.510\angle 78.7^\circ) \ \text{S},$$
$$E = (10.0\angle 0.00^\circ) \ \text{V},$$
$$I = (5.10\angle 78.7^\circ) \ \text{A}.$$

これらを図示すれば，**図 5.28** のようになる.

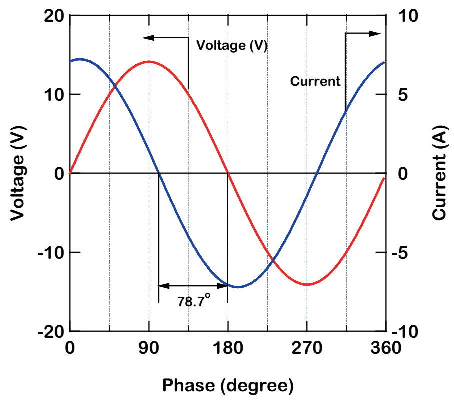

図 5.27 計算練習用の RC 並列回路の電圧波形と電流波形の関係.

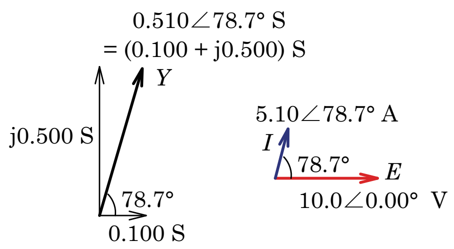

図 5.28 計算練習用の RC 並列回路の Y，E，I の関係.

5.9 計算練習 (その 3) RL 直列回路

図 5.29 に示した回路について，以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t) = E_{\rm m}\sin\omega t$ で表され，$E_{\rm m} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．また，$L = 10$ mH，$R = 10\ \Omega$ とする．有効数字は 3 桁とする．

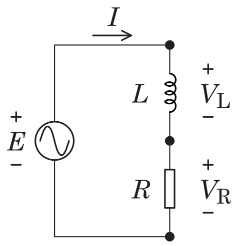

図 5.29 計算練習用の RL 直列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. L と R の合成インピーダンス Z を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. L にかかる電圧 (フェーザ形式)$V_{\rm L}$ を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R にかかる電圧 (フェーザ形式)$V_{\rm R}$ を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. E，$V_{\rm L}$，$V_{\rm R}$ の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Z，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t) = E_{\rm m}\sin(\omega t + \theta)$ に対応するフェーザ表記が $E = \frac{E_{\rm m}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のようになる.

$$E = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \text{V}$$

となる.

略解 2

この場合の合成インピーダンス Z を表す式は，

$$Z = R + {\rm j}\omega L.$$

である．従って，

$$\begin{aligned} Z &= 10 + {\rm j}(5000) \times (10 \times 10^{-3}) \\ &= 10 + {\rm j}50 \\ &= 50.99\angle 78.69^\circ \\ &= (51.0\angle 78.7^\circ)\ \Omega. \end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I = E/Z$ において，$E = (10\angle 0^\circ)$ V，$Z = (50.99\angle 78.69^\circ)\ \Omega$ であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{50.99\angle 78.69^\circ} \\ &= \frac{10}{50.99}\angle -78.69^\circ \\ &= 0.1961\angle -78.69^\circ \\ &= (0.196\angle -78.7^\circ)\ \text{A}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

略解 4

L のインピーダンスを $Z_{\rm L}$ とすると，オームの法則より，L にかかる電圧は $V_{\rm L} = Z_{\rm L}I$ で求められる．$Z_{\rm L}$ は，

$$\begin{aligned} Z_{\rm L} &= {\rm j}\omega L = {\rm j}5000 \times 10 \times 10^{-3} \\ &= {\rm j}50.0 \\ &= (50.0\angle 90.0^\circ)\ \Omega. \end{aligned}$$

となる．従って，$V_{\rm L}$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} V_{\rm L} &= Z_{\rm L}I \\ &= (50\angle 90^\circ) \times (0.1961\angle -78.69^\circ) \\ &= 9.805\angle 11.31^\circ \\ &= (9.81\angle 11.3^\circ)\ \text{V}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

略解 5

オームの法則より，R にかかる電圧は $V_{\rm R} = RI$ で求められる．従って，$V_{\rm R}$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} V_{\rm R} &= Z_{\rm R}I \\ &= 10 \times (0.1961\angle -78.69^\circ) \\ &= 1.961\angle -78.69^\circ \\ &= (1.96\angle -78.7^\circ)\ \text{V}. \end{aligned}$$

略解 6

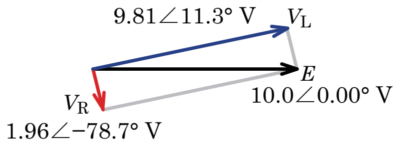

図 5.30 計算練習用の RL 直列回路の電圧 (フェーザ) の複素平面上での関係.

これまでに得た $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}$ は以下の通りである.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{V},\\ \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}} &= (9.81\angle 11.3^\circ)\ \ \mathrm{V},\\ \boldsymbol{V}_{\mathrm{R}} &= (1.96\angle -78.7^\circ)\ \ \mathrm{V}.\end{aligned} \tag{5.43}$$

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.30** のようになる.

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$\boldsymbol{I} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している.

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi).$$

$\boldsymbol{I} = (0.1961\angle -78.69^\circ)$ A であったから，振幅 I_{m} と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_{\mathrm{m}} = 0.1961\sqrt{2} = 0.277\ \mathrm{A}, \quad \phi = -78.7^\circ.$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる.

$$i(t) = 0.277\sin(\omega t - 78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$\begin{aligned}e(t) &= 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t\ \ \mathrm{V},\\ i(t) &= 0.277\sin(\omega t - 78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

これらを図示すれば，**図 5.31** のようになる.

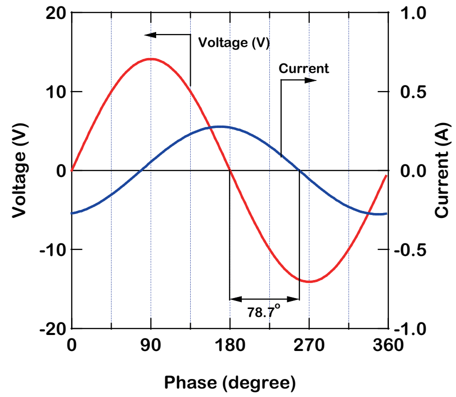

図 5.31 計算練習用の RL 直列回路の電圧波形と電流波形の関係.

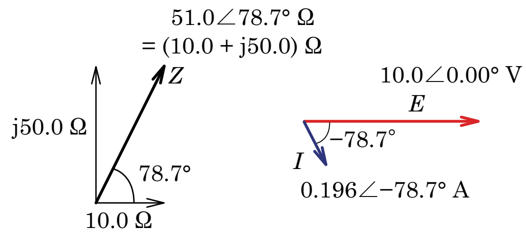

図 5.32 計算練習用の RL 直列回路の $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{I}$ の関係.

略解 9 インピーダンス $\boldsymbol{Z}$, 電圧 $\boldsymbol{E}$, 電流 $\boldsymbol{I}$ は，それぞれ次式の通りである.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= (10.0 + \mathrm{j}50.0) = (51.0\angle 78.7^\circ)\ \ \Omega,\\ \boldsymbol{E} &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{V},\\ \boldsymbol{I} &= (0.196\angle -78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

これらを図示すれば，**図 5.32** のようになる.

5.10 計算練習 (その 4) RL 並列回路

図 5.33 に示した回路について，以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t)=E_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ で表され，$E_{\mathrm{m}}=10\sqrt{2}\,\mathrm{V}$, $\omega=5000$ rad/s とする．また, $L=1$ mH, $R=10$ Ω とする．有効数字は 3 桁とする．

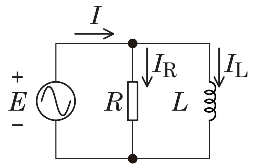

図 5.33 計算練習用の RL 並列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. L と R の合成アドミタンス Y を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. L に流れる電流 (フェーザ形式)I_{L} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R に流れる電流 (フェーザ形式)I_{R} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. I，I_{L}，I_{R} の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Y，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す $e(t)=E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ に対応するフェーザ形式が $E=\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のように表される.

$$E=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ=(10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}$$

略解 2

この場合の合成アドミタンス Y を表す式は,

$$Y=\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}.$$

である．従って，Y は以下のようになる.

$$\begin{aligned}Y&=\frac{1}{10}+\frac{1}{\mathrm{j}(5000)\times(1\times10^{-3})}\\&=0.1-\mathrm{j}0.2\\&=0.2236\angle-63.43^\circ\\&=(0.224\angle-63.4^\circ)\ \mathrm{S}.\end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I=YE$ において，$E=10\angle0^\circ$ V，$Y=0.224\angle-63.4^\circ$ S であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I=YE&=(0.2236\angle-63.43^\circ)\times(10\angle0^\circ)\\&=2.236\angle-63.43^\circ\\&=(2.24\angle-63.4^\circ)\ \mathrm{A}.\end{aligned}\tag{5.44}$$

略解 4

L のアドミタンスを Y_{L} とすると，オームの法則より，L に流れる電流は $I_{\mathrm{L}}=Y_{\mathrm{L}}E$ で求められる．Y_{L} は,

$$\begin{aligned}Y_{\mathrm{L}}&=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=\frac{-\mathrm{j}}{5000\times1\times10^{-3}}\\&=-\mathrm{j}0.2\\&=(0.20\angle-90.0^\circ)\ \mathrm{S}.\end{aligned}$$

となる．従って，I_{L} は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{L}}&=Y_{\mathrm{L}}E\\&=(0.2\angle-90^\circ)\times(10\angle0^\circ)\\&=2\angle-90^\circ\\&=(2.00\angle-90.0^\circ)\ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

略解 5

オームの法則より，R に流れる電流は $I_{\mathrm{R}}=E/R$ で求められる．従って，I_{R} は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{R}}&=\frac{E}{R}\\&=\frac{10\angle0^\circ}{10}\\&=(1.00\angle0.00^\circ)\ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

略解 6

これまでに得た I，I_{L}，I_{R} は以下の通りである.

$$\begin{aligned}I&=(2.24\angle-63.4^\circ)\ \mathrm{A},\\I_{\mathrm{L}}&=(2.00\angle-90.0^\circ)\ \mathrm{A},\\I_{\mathrm{R}}&=(1.00\angle0.00^\circ)\ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

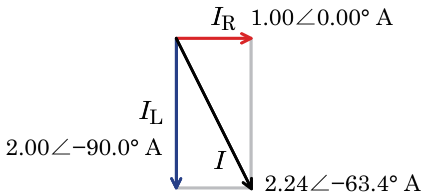

図 5.34 計算練習用の RL 並列回路の電流 (フェーザ) の複素平面上での関係.

$I = I_L + I_R$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.34** のようになる.

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味する.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (2.236\angle-63.43^\circ)$ A であったから，振幅 I_m と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_m = 2.236\sqrt{2} = 3.16 \text{ A}, \quad \phi = -63.4^\circ.$$

従って，$i(t)$ は以下のようになる.

$$i(t) = 3.16\sin(\omega t - 63.4^\circ)\ \text{A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$e(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t\ \text{V},$$
$$i(t) = 3.16\sin(\omega t - 63.4^\circ)\ \text{A}.$$

これらを図示すれば，**図 5.35** のようになる.

略解 9

アドミタンス Y，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである.

フェーザ形式で表した電圧と電流は次式の通りである.

$$Y = (0.100 + \text{j}0.200) = (0.224\angle-63.4^\circ)\ \text{S},$$
$$E = (10.0\angle0.00^\circ)\ \text{V},$$
$$I = (2.24\angle-63.4^\circ)\ \text{A}.$$

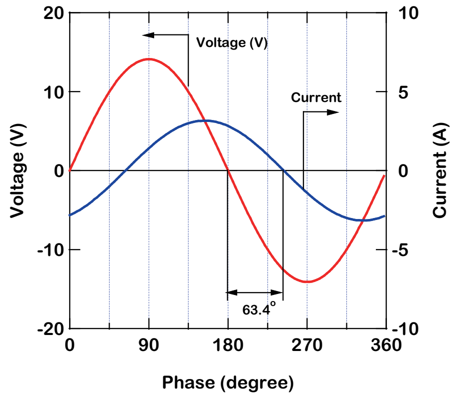

図 5.35 計算練習用の RL 並列回路の電圧波形と電流波形の関係.

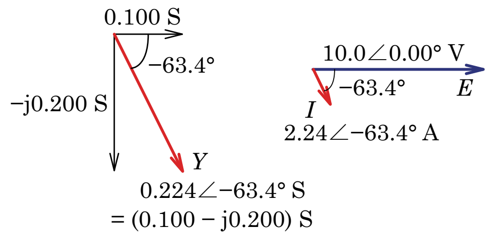

図 5.36 計算練習用の RL 並列回路の Y，E，I の関係.

これらを図示すれば，**図 5.36** のようになる.

豆知識

豆知識

インピーダンスとフェーザを同じ平面上に描かない

Z はインピーダンスであり，フェーザの電圧や電流とは意味が異なる．フェーザは，正弦波の特徴である振幅 (実効値に変換しているが) と位相を表す表現方法の一つであるが，インピーダンスは波形の特徴を表した物理量では無い．従って，インピーダンスとフェーザを同じ複素平面上に描くのは不適切であると筆者は考えている．

なお，より厳密に見れば，電圧と電流も単位の異なる物理量であるから，電圧と電流のフェーザを何の根拠も無しに同じ複素平面上に描くのはおかしい．多少無理矢理であるが，以下のような根拠があれば許されるかもしれない．即ち，長さに関しては，電流フェーザ用と電圧フェーザ用でそれぞれ異なるスケールを用いている，という根拠である．但し，電圧と電流はそもそも異なる物理量であるから，電圧と電流のフェーザの長さの大小を比べてもあまり意味がないことを認識して欲しい．

これに対し，電圧と電流のフェーザが成す角度に関しては共通のスケールとなっているので，矢印で表された二つのフェーザの間の角度は，その二つのフェーザを波形で表したときの位相差に対応する，という意味を持つ．

異なる物理量である電圧と電流のフェーザを無理矢理同じ複素平面上で描くことがまかり通っている大きな理由は，後者の利便性があるからではないだろうか，と思う．実際，フェーザに慣れてくれば，フェーザの図を見ただけで，オシロスコープで観測される波形 (**図 5.23** に示すような) がどのように見えることになるか，ということがわかるようになる．

豆知識

学術論文における字体のルール

学術論文 (特に工学系) や厳格なテキストでは，式関係で用いる字体についても以下のような厳格なルールがある．

- **斜体，イタリック**
  物理量，変数，変関数を表す場合
  例：電流 I，電圧 V，電力 P，ボルツマン定数 k_B，$f(x)$，...
- **立体，ローマン**
  モノ，コト，既定関数，演算子，単位，数値
  例：$I_\mathrm{m} = 1\ \mathrm{A}$，$V_\mathrm{e} = 1\ \mathrm{V}$，$\sin\theta$，$\mathrm{d}x$，...
  I_m の下付の m は最大というコトを表すので I_m とは書かない．V_e の下付の e も実効値であるというコトを表すので V_e とは書かない．虚数単位の j(或いは，数学の場合には i) も，変数ではないので，j，i とは書かない．指数関数の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ の e も変数ではないので，$e^{j\theta}$ とは書かない．k_B の下付の B も，Botlzmann という人の名前の頭文字であるから，k_B とは書かない．微分記号も以下のようになる．

$$\bigcirc\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \times\ \frac{di}{dt}$$

従って，本書のような電気回路の場合には，厳密に判定すると，以下のようになる．

×「抵抗 R を接続すると...」
○「抵抗 R を接続すると...」
○「抵抗値 R が増加すると...」
×「抵抗値 R が増加すると...」

本書では，「抵抗 R」のような書き方もしているが，厳格に書くと極めて冗長になるので，以下のように省略したものと思って欲しい (手抜きですが...).

- 厳密版：抵抗値が R の抵抗 R
  省略版：抵抗 R，あるいは単に R
- 厳密版：インダクタンスが L のコイル L
  省略版：コイル L，あるいは単に L
- 厳密版：キャパシタンスが C のコンデンサ C
  省略版：コンデンサ C，あるいは単に C

更に，数値と単位の間には必ずスペース (半角) を入れるというルールもある．本書でもこのルールに則っていないところがまだ残っていますが，随時，直していきます．

豆知識

電気回路の音響への応用

エレキギターを扱う人であれば，**図 5.37** に示すようなエフェクターの一つであるフェイズシフター，もしくは，フェイザーというものがあるのを知っている思う．これは，本稿で触れた移相回路を原理とするデバイス

図 5.37 フェイズシフター (BOSS PH-3) [3].

である．但し，位相をずらしただけでは，波形に変化は現れない．従って，音色も変化しない．このデバイスでは，もとの音響信号と位相をずらした音響信号を干渉させる．しかし，正弦波の位相をずらして足しても，強め合うか弱め合うかのどちらかである．従って，色々な周波数の混合波形である音響信号の全ての周波数成分が同じ位相だけずれても，音が強くなるか弱くなるかだけである．

エフェクターのフェイズシフターを通すと音色が変わるのは，周波数によって位相シフト量が異なるからである．これにより，ある周波数帯域の音は強め合い，ある周波数帯域の音は弱め合うことになる．

ただ，これだけでは，原音からの違いは時間的に変化しないため，面白みのない音になる．エフェクターでは，位相のずれを周期的に変化させることでふわふわしたワウ的な効果を与えている．似たデバイスとして，フランジャーがあるが，こちらは信号遅延回路を原理として使っている．

事前基盤知識確認事項

[1] フェーザ形式による表現の復習

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ なる電流のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$$I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \quad \text{または} \quad I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \angle\theta.$$

これを複素平面上で図示すれば，**図 5.38** のようになる．

[2] フェーザ形式による表現の復習

$v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ なる電圧のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$$V = \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \quad \text{または} \quad V = \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \angle\theta.$$

これを複素平面上で図示すれば，**図 5.39** のようになる．

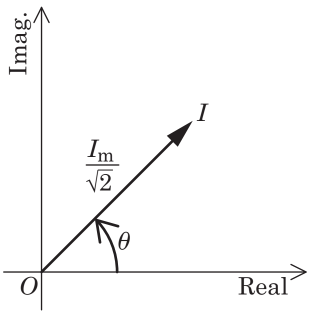

図 5.38 $i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現．

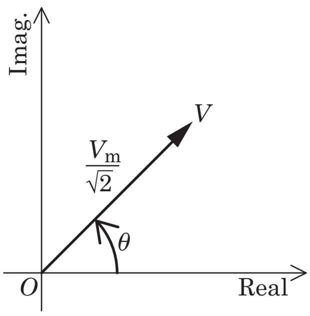

図 5.39 $v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現．

[3] インピーダンスの復習

R, L, C で構成される直列回路の合成インピーダンス Z を表す式を書け．Z の両端の電圧とそこを流れる電流をフェーザ形式で表したものを V，I とするとき，V，I，Z の間に成り立つ式を書け．

略解

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$
$$V = ZI$$

[4] アドミタンスの復習

R, L, C で構成される並列回路の合成アドミタンス Y を表す式を書け．Y の両端の電圧とそこを流れる電流をフェーザ形式で表したものを V，I とするとき，V，I，Y の間に成り立つ式を書け．

略解

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C$$
$$I = YV$$

事後学習内容確認事項

簡単な四則演算によるフェーザを用いた計算結果からオシロスコープで観測されるはずの波形を予測する．

A. 直列接続

$v(t) = V_\mathrm{m} \sin \omega t$ で，$V_\mathrm{m} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．抵抗 $R = 1\ \Omega$，コンデンサ $C = 400\ \mu$F の RC 直列回路について以下の問いに答えよ．有効数字 3 桁で答えよ．

1. 波形とフェーザの関係

$v(t)$ のフェーザ表記を V とするとき，V を極座標形式 ($r\angle\theta$ の形式) で表せ．

略解

振幅 V_m から実効値 V_e を求めると，

$$V_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 10.0V$$

電圧の初期位相はゼロであるから，

$$V = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}$$

2. 直列インピーダンス

RC 直列合成インピーダンス Z の値を直角座標形式と極座標形式で書け．Z を複素平面上で図示せよ．

略解

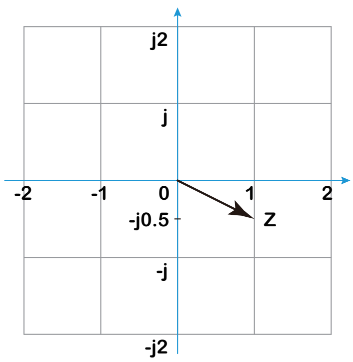

図 5.40 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu$F の直列接続インピーダンス Z.

$$\begin{aligned} Z &= R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ &= (1.00 - \mathrm{j}0.500)\ \Omega \end{aligned}$$

極座標形式では，

$$\begin{aligned} Z &= 1.118\angle -26.57^\circ \\ &= (1.12\angle -26.6^\circ)\ \Omega \end{aligned}$$

これを図示すると**図 5.40** のようになる．

3. 交流版オームの法則

Z に流れる電流のフェーザ表記を I とする．I を極座標形式で表せ．V と I を複素平面上で表せ．

略解

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{1.118\angle -26.57^\circ} \\ &= \frac{10}{1.118}\angle(0^\circ + 26.57^\circ) \\ &= 8.944\angle 26.57^\circ \\ &= (8.94\angle 26.6^\circ)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

これを図示すると**図 5.41** のようになる．

4. フェーザ形式から時間領域関数へ

フェーザ形式の I から，時間領域の $i(t)$ を求めよ．

略解

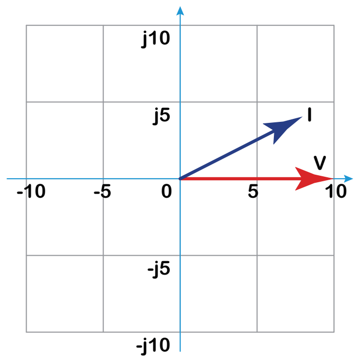

図 5.41 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu$F の直列接続インピーダンス Z にかかる V とそこに流れる I の関係.

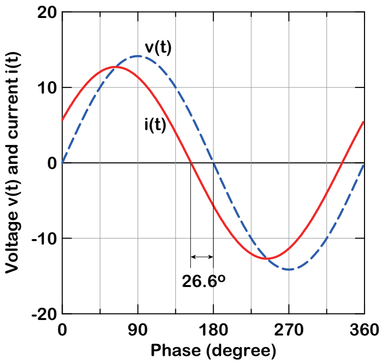

図 5.42 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu\mathrm{F}$ の直列接続インピーダンス $\boldsymbol{Z}$ にかかる電圧の波形 $v(t)$ と，そこに流れる電流の波形 $i(t)$ の関係．

$$
\begin{aligned}
I_\mathrm{m} &= I_\mathrm{e}\sqrt{2} = 8.944 \times \sqrt{2} = 12.65 \\
&= 12.7\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
i(t) = 12.7 \sin(\omega t + 26.6^\circ)\ \mathrm{A}
$$

これを図示すると**図 5.41** のようになる．

B. 並列接続

$i(t) = I_\mathrm{m} \sin \omega t$ で，$I_\mathrm{m} = 10\sqrt{2}$ A，$\omega = 5000$ rad/s とする．抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.4$ mH の RL 並列回路について，以下の問いに答えよ．有効数字 3 桁で答えよ．

1. 波形とフェーザの関係

$i(t)$ のフェーザ表記を $\boldsymbol{I}$ とするとき，$\boldsymbol{I}$ を極座標形式 ($r\angle\theta$ の形式) で表せ．

略解

振幅 I_m から実効値 I_e を求めると，

$$
I_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 10.0A
$$

電流の初期位相はゼロであるから，

$$
\boldsymbol{I} = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{A}
$$

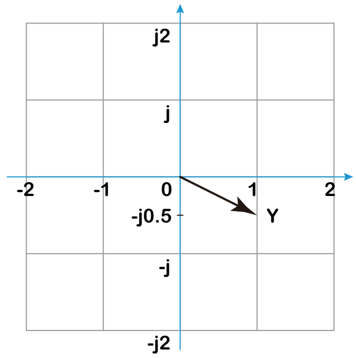

図 5.43 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス $\boldsymbol{Y}$．

2. 並列インピーダンス

RL 並列合成アドミタンス $\boldsymbol{Y}$ の値を直角座標形式と極座標形式で書け．$\boldsymbol{Y}$ を複素平面上で図示せよ．

略解

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \\
&= (1.00 - \mathrm{j}0.500)\ \mathrm{S}
\end{aligned}
$$

極座標形式では，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= 1.118\angle -26.57^\circ \\
&= (1.12\angle -26.6^\circ)\ \mathrm{S}
\end{aligned}
$$

これを図示すると**図 5.43** のようになる．

3. 交流版オームの法則

$\boldsymbol{Y}$ にかかる電圧のフェーザ表記を $\boldsymbol{V}$ とする．$\boldsymbol{V}$ を極座標形式で表せ．$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{V}$ を複素平面上で表せ．

略解

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{Y}} = \frac{10\angle 0^\circ}{1.118\angle -26.57^\circ} \\
&= \frac{10}{1.118}\angle(0^\circ + 26.57^\circ) \\
&= 8.944\angle 26.57^\circ \\
&= (8.94\angle 26.6^\circ)\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

これを図示すると**図 5.44** のようになる．

4. フェーザ形式から時間領域関数へ

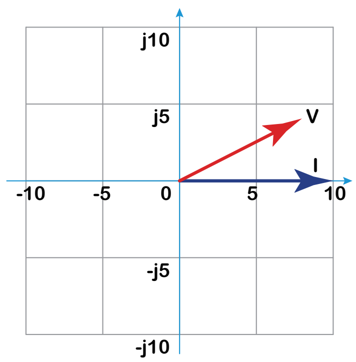

図 5.44 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス Y に流れる電流 I と，そこにかかる電圧 V の関係.

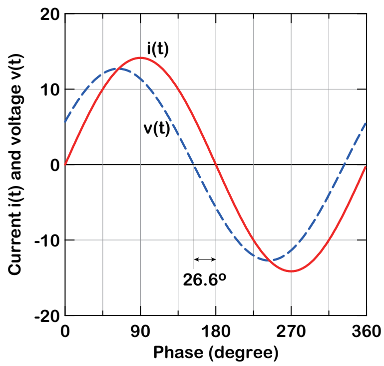

図 5.45 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス Y に流れる電流の波形 $i(t)$ と，そこにかかる電圧の波形 $v(t)$ の関係.

フェーザ形式の V から，時間領域の $v(t)$ を求めよ.

略解

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{m}} &= V_{\mathrm{e}}\sqrt{2} = 8.944 \times \sqrt{2} = 12.65 \\ &= 12.7\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

よって，

$$v(t) = 12.7 \sin(\omega t + 26.6^\circ)\ \mathrm{V}$$

これを図示すると**図 5.45** のようになる.

参考文献

[1] https://www.yokogawa.com/jp-ymi/gmi/dc/gmi-2755-001-jp.htm?nid=left

[2] http://bestoinstruments.com/product/Maxwells-Inductance.aspx

[3] http://jp.boss.info/