

第7章

共振回路

今までは、 ω はいつも同じであった。ここでは、

- ω が変化する、
- 異なる ω の波形が関与する、

という状況を取り扱い、「共振」について学ぶ。

7.1 電気回路における「共振」とは？

電気回路における「共振」とは、

電圧や電流がある周波数で極値をとる

ことを言う。

以下では、この「共振」とは何なのか、何故そうなるのか、何に使うのか、を具体例を扱うことによって、より詳しく説明する。その前に、まず、本章の要を述べる。

7.2 本章の要 (共振周波数と Q 値)

図 7.1 のように、あるインピーダンスが周波数 ω の電源に接続されているものとし、そのインピーダンスを $Z = R + jX$ であるとする。インピーダンスの絶対値 $|Z|$ 、もしくは、その逆数であるアドミタンスの絶対値 $1/|Z|$ を周波数に対してプロットすると、図 7.2 のように、ある周波数 ω において極値をとることがある。図 7.2 では極値が極大となるアドミタンスの絶対値をプロットしたが、インピーダンスの絶対値をプロットすると、極値が

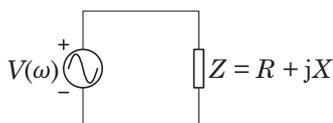


図 7.1 周波数 ω の電源に接続されたインピーダンス Z 。

極小となる。インピーダンス、或いはアドミタンスが極値をとれば、自動的に電圧、或いは電流が極値を取ることになる。従って、「共振しているとき」とは、インピーダンス、または、アドミタンスが極値をとるとき、と言い換えてもよい。

本章で学ぶ事項の第一点目は、

インピーダンスが極値を持つのはその虚部が 0 となるときである、

ということである。第二点目は、

応用上、極大 (または極小) 特性の鋭さが重要であり、その鋭さを表すために Q 値という指標を使う、

ということである。

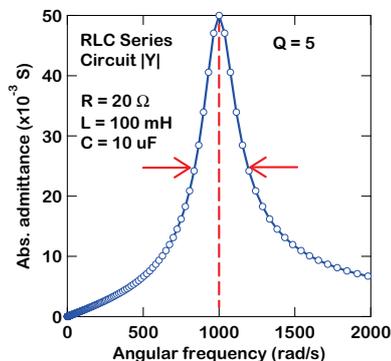


図 7.2 アドミタンスの大きさ (絶対値) が極値をもつ特性の一例。具体的には、 $R = 20 \Omega$ 、 $L = 100 \text{ mH}$ 、 $C = 10 \mu\text{F}$ の直列回路のアドミタンスの大きさ (絶対値) の周波数依存性である。

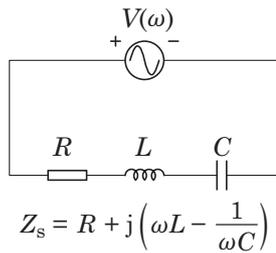


図 7.3 RLC 直列共振回路.

7.3 直列共振回路とその周波数特性

7.3.1 直列共振回路

L と C が直列接続された回路は共振特性を持ち、その回路を直列共振回路という。一般的には、抵抗成分も含めて、図 7.3 に示すような回路になる。この回路では、電圧源が与えられている。フェーザ形式の電圧の絶対値 $|V|$ が一定であるならば（普通はそうである）、インピーダンスの周波数依存性によって極値をとるのは電流である。回路のインピーダンスを Z_s とすると、

$$I = \frac{V}{Z_s} \quad (7.1)$$

であるから、インピーダンスが極小なら電流が極大、インピーダンスが極大なら電流が極小となる。計算すればわかるが、この回路の場合には、インピーダンスが極小となる、即ち、アドミタンス $Y_s = 1/Z_s$ が極大となる*1。

そこで、インピーダンス Z_s の絶対値 $|Z_s|$ が極小になる、即ち、アドミタンス Y_s の絶対値 $|Y_s|$ 極大になる条件を求めよう。 Z_s は、

$$Z_s = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7.2)$$

である。この式から、 Z_s の $j(\)$ の中、即ち、 Z_s の虚部がゼロになるときに $|Z_s|$ が極小値 (= R) となることがわかる。 Z_s の虚部がゼロになる周波数を ω_0 とすると、次式が成り立っていることになる。

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \quad (7.3)$$

これより、共振周波数が L と C によって以下のように表されることがわかる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.4)$$

上記の周波数（厳密に言えば角周波数）を普通の周波数で表せば、以下ようになる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.5)$$

7.3.2 直列共振回路の周波数特性の特徴

以上をまとめると、直列共振回路の特徴は以下の通りとなる。

- 共振周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である。このとき、
- Z_s の虚部がゼロになる。
- $|Z_s|$ が極小値 R となる。
- $|Y_s|$ が極大値 $1/R$ となる。
- $|I|$ が極大値 $|V|/R$ となる。

7.3.3 直列共振回路の周波数特性の具体例

具体的に R, L, C の値を与えて、直列共振回路のインピーダンスとアドミタンスの大きさの周波数依存性を図示してみよう。ここでは、 $L = 100 \text{ mH}$ 、 $C = 10 \mu\text{F}$ とする。共振周波数は R によらないので、 L と C を定めた時点で共振周波数が決まり、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} \quad (7.6)$$

$$= 1000 \text{ rad/s} \quad (7.7)$$

となる。抵抗 R は共振周波数にはならぬ影響を及ぼさないが、後述のように、その大小が共振特性に重大な影響を及ぼす。そこで、 R については幾つかの値を試した。具体的には、 0Ω 、 10Ω 、 20Ω 及び 50Ω の 5 種類を試した。

以上の条件設定の下で計算したアドミタンスの周波数依存性を図 7.4 に示す。この図から、 R によらず $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ にてアドミタンスの絶対値 $|Y_s|$ が極大値を取っていることがわかる。異なる R を用いた効果として目に見えてわかる点は、以下の二点かと思う。

- 直列共振時のアドミタンスの絶対値が異なる。
- 直列共振特性のピークのシャープさが低抵抗ほどシャープである。

*1 なお、上記特徴等を述べるときに「極大」「極小」というコトバを用いたが、本章の回路では全周波数帯域において「極大」または「極小」が一つしかないので「最大」または「最小」と読み替えても問題ない。

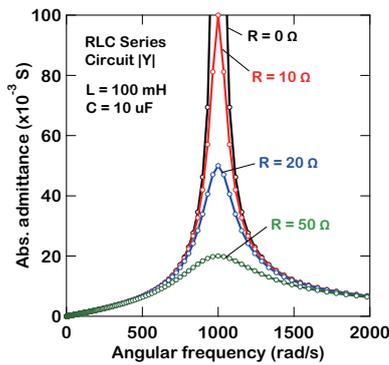


図 7.4 RLC 直列共振回路のアドミタンス (の絶対値) の周波数特性.

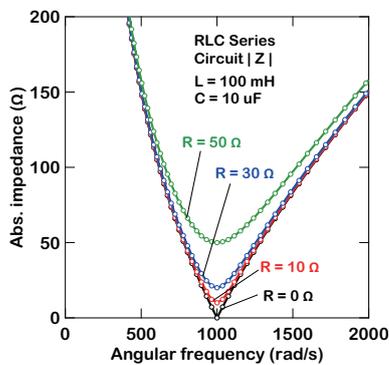


図 7.5 RLC 直列共振回路のインピーダンス (の絶対値) の周波数特性.

この二つの特徴のうち、後者が応用上極めて重要な点となる。このシャープさを定量的に評価するために Q 値なるパラメータを定義するのだが、これについては、並列共振周波数について述べた後に定義をすることにする。

7.4 並列共振回路とその周波数特性

7.4.1 並列共振回路

L と C が並列接続された回路も共振特性を持ち、その回路を並列共振回路という。一般的には、抵抗成分も含めて、図 7.6 に示すような回路になる。この回路では、電流源が与えられている。フェーザ形式の電流の絶対値 $|I|$ が一定であるならば (普通はそうである)、インピーダンスの周波数依存性によって極値をとるのは電圧であ

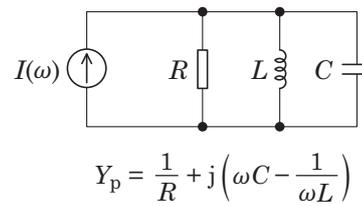


図 7.6 RLC 並列共振回路.

る。回路のインピーダンスを Z_p とすると、

$$V = Z_p I \quad (7.8)$$

であるから、インピーダンスの大きさが極小になれば、電圧の大きさが極小となり、インピーダンスの大きさが極大になれば、電圧の大きさが極大となる。計算するとわかるが、この回路の場合には、インピーダンスの大きさが極大となる。即ち、アドミタンス $Y_p = 1/Z_p$ の大きさ $|Y_p|$ が極小となる。

そこで、アドミタンスの絶対値 $|Y_p|$ が極小となる条件を求めよう。 Y_p は、

$$Y_p = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (7.9)$$

である。この式から Y_p の $j(\)$ の中、即ち Y_p の虚部がゼロになるときに $|Y_p|$ が極小値 ($=1/R$) となることがわかる。 Y_p の虚部がゼロになる周波数を ω_0 とすると、次式が成り立っていることになる。

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \quad (7.10)$$

これより、共振周波数が L と C によって、以下のように表されることがわかる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.11)$$

上記の周波数 (厳密に言えば角周波数) を普通の周波数に直せば、以下ようになる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.12)$$

既に導出した直列共振回路の共振周波数の式と今回導出した並列共振周波数の式を見比べてみると、両方ともに同じ式となっていることがわかる。

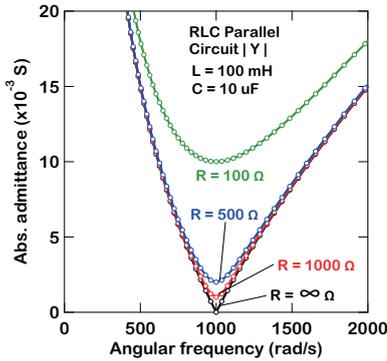


図 7.7 RLC 並列共振回路のアドミタンス (の絶対値) の周波数特性.

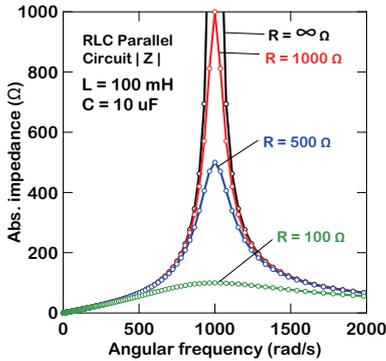


図 7.8 RLC 並列共振回路のインピーダンス (の絶対値) の周波数特性.

7.4.2 並列共振回路の周波数特性の特徴

以上をまとめると、並列共振回路の特徴は以下の通りとなる。

- 共振周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である。
- $|Y_p|$ が極小値 $1/R$ となる。
- $|Z_p|$ が極大値 R となる。
- $|V|$ が極大値 $R|I|$ となる。

7.4.3 並列共振回路の周波数特性の特徴

具体的に R, L, C の値を与えて、並列共振回路のインピーダンスとアドミタンスの大きさの周波数依存性を図示してみよう。ここでは、 $L = 100 \text{ mH}$ 、 $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ とする。共振周波数は R によらないので、 L と C を定めた

時点で共振周波数が決まり、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} \quad (7.13)$$

$$= 1000 \text{ rad/s} \quad (7.14)$$

となる。抵抗 R は共振周波数にはなら影響を及ぼさないが、後述のように、その大小が共振特性に重大な影響を及ぼす。そこで、 R については幾つかの値を試した。具体的には、 $100 \text{ }\Omega$ 、 $500 \text{ }\Omega$ 、 $1000 \text{ }\Omega$ 及び $\infty \text{ }\Omega$ の 5 種類を試した。

以上の条件設定の下で計算したアドミタンスの周波数依存性を図 7.7 に示す。この図から、 R によらず $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ にてアドミタンスの絶対値 $|Y_p|$ が極大値を取っていることがわかる。異なる R を用いた効果として目に見えてわかる点は、以下の二点かと思う。

- 並列共振時のアドミタンスの絶対値が異なる。
- 並列共振特性のピークのシャープさが高抵抗ほどシャープである。

この二つの特徴のうち、後者が応用上極めて重要な点となる。このシャープさを定量的に評価するために Q 値なるパラメータを定義するが、その前に、共振特性の鋭さがなぜ重要なのか、について少し触れておく。

7.5 共振回路の性質と用途

もう一度、直列共振回路と並列共振回路の性質をまとめると、以下ようになる。

- 直列共振回路
 - 共振回路に交流電圧を印加すると、
 - $|I| = |Y_s||V|$ が極大値をとり、
 - 共振周波数の時に電流が極めて良く流れる
- 並列共振回路
 - 共振回路に交流電流を流すと、
 - $|V| = |Z_p||I|$ が極大値をとり、
 - 共振周波数の時に電圧が極めて大きくなる

これらの性質を利用すると、図 7.9 に示すように、複数の周波数成分が混在した信号からある周波数成分だけをとり出すことに利用することができる*2。そうした

*2 これを理解するためには、まず、「複数の周波数成分が混在した信号」というものがどんなものであるのかや、任意の波形を表

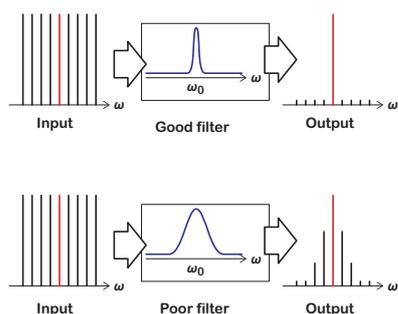


図 7.9 周波数選別に用いられるフィルタの機能と、共振特性の鋭さの良否がその性能に及ぼす影響。

機能は、通信機器などに含まれる同調回路やフィルタ回路として利用される。このような用途に共振回路を用いる場合、共振特性がシャープではなく幅をもったものになると、ある周波数の信号だけを取り出したいのに、その周波数に近い成分も同時に取り出されてしまう。従って、ある周波数を選別するという目的（現実にはその目的が最も多い）に限定すれば、

共振特性はシャープなほど良い、

ということが出来る。

共振周波数特性の鋭さを「鋭い」「鋭く無い」などのコトバで文学的に表現するのではなく、何らかの統一されたルールで求めた数値で示し、共振回路特性の良さを共通の土俵で比較できる指標が必要である。次の節では、この共振特性の鋭さを表すための指標として「 Q 値 (Quality Factor)」なるものを定義する。

7.6 Q 値 (Quality Factor)

ある物理量に対して図 7.10 のような共振特性があるとき、共振の鋭さを表すための指標として Q 値を以下のように定義する。「ある物理量」としては、インピーダンス、アドミタンス、電圧、電流などが想定される。

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (7.15)$$

ここで、 ω_0 は共振特性の中心周波数、即ち共振周波数である。 ω_1 、 ω_2 は、その物理量が、共振周波数のときの値の $1/\sqrt{2}$ の大きさになる周波数であり、共振周波数

すことのできるフーリエ級数展開の理論を知っておく必要があるので、本章の付録に記した。

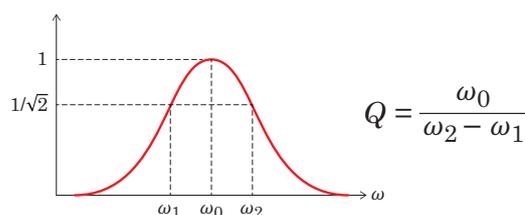


図 7.10 共振特性の鋭さを表す Q 値の定義。

よりも低周波数側にある方を ω_1 、共振周波数よりも高周波数側にある方を ω_2 としている。

7.7 RLC 直列共振回路の Q 値と R の関係

図 7.11 は、 $L = 100 \text{ mH}$ 、 $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ 、 $R = 10 \text{ } \Omega$ 、 $20 \text{ } \Omega$ 、 $50 \text{ } \Omega$ の RLC 直列共振回路のアドミタンスの周波数特性である。同図からわかるように、

RLC 直列共振回路の鋭さは、抵抗値 R が小さいほど鋭い。即ち、抵抗値 R が小さいほど Q 値が大きい。

この例の場合には、 $R = 10 \text{ } \Omega$ 、 $20 \text{ } \Omega$ 、 $50 \text{ } \Omega$ に対して、 $Q = 10$ 、 $Q = 5$ 、 $Q = 2$ となっている。

7.8 RLC 並列共振回路の Q 値と R の関係

図 7.12 は、 $L = 100 \text{ mH}$ 、 $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ 、 $R = 1000 \text{ } \Omega$ 、 $500 \text{ } \Omega$ 、 $100 \text{ } \Omega$ の RLC 並列共振回路のインピーダンスの周波数特性である。同図からわかるように、

RLC 並列共振回路の鋭さは、抵抗値 R が大きいほど鋭い。即ち、抵抗値 R が大きいほど Q 値が大きい。

この例の場合には、 $R = 1000 \text{ } \Omega$ 、 $500 \text{ } \Omega$ 、 $100 \text{ } \Omega$ に対して、 $Q = 10$ 、 $Q = 5$ 、 $Q = 1$ となっている。

7.9 Q 値と抵抗の大きさ

前節において、共振特性のピークの鋭さと R の間には何らかの関係があることを示した。また、その鋭さを表す数値的指標である Q 値も当然ながら R との間に何らかの関係がある。結論から先に述べると、以下の関係

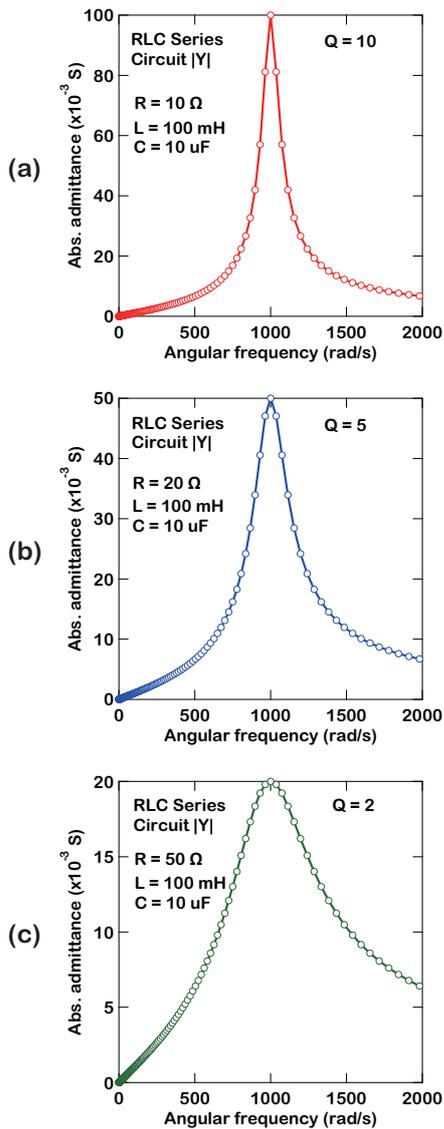


図 7.11 コイル ($L = 100 \text{ mH}$) とコンデンサ ($C = 10 \text{ } \mu\text{F}$) の直列接続回路に異なる抵抗値の抵抗 ($R = 10 \text{ } \Omega$, $20 \text{ } \Omega$, $50 \text{ } \Omega$) が直列接続されている回路の共振特性。

があるのである。これらの関係の導出過程については、単純作業であるが、大変長くなるので、章末に課題としてまとめた。各自にて確認すること。

- RLC 直列共振回路の Q 値は次式で与えられる。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.16)$$

- RLC 並列共振回路の Q 値は次式で与えられる。

$$Q = \omega_0 C R = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (7.17)$$

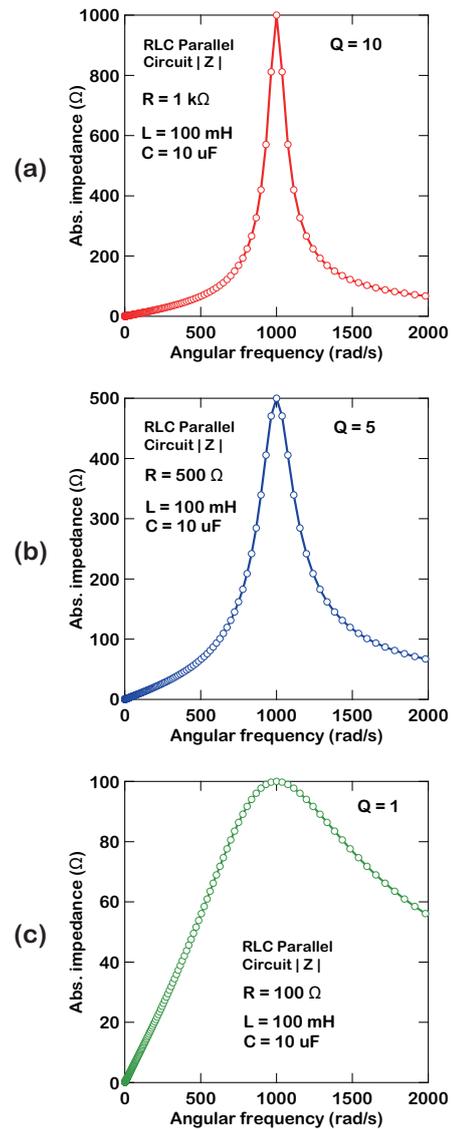


図 7.12 コイル ($L = 100 \text{ mH}$) とコンデンサ ($C = 10 \text{ } \mu\text{F}$) の並列接続回路に異なる抵抗値の抵抗 ($R = 1000 \text{ } \Omega$, $500 \text{ } \Omega$, $100 \text{ } \Omega$) が並列接続されている回路の共振特性。

7.10 直列共振回路，並列共振回路の抵抗成分について

これまで、図 7.13 に示した RLC 直列共振回路と図 7.14 に示した RLC 並列共振回路について、その共振周波数や共振特性の鋭さを表す Q 値を表す式の導出を行ってきた。その結果、 Q 値が大きい、即ち、共振特性が鋭い回路を作るためには、以下のような回路を作ればよい、ということを示した。

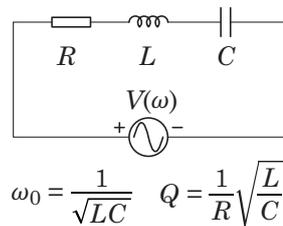


図 7.13 RLC 直列共振回路と共振周波数 ω_0 及び Q 値を表す式.

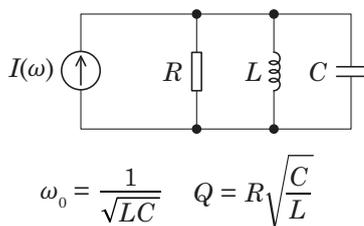


図 7.14 RLC 並列共振回路と共振周波数 ω_0 及び Q 値を表す式.

- 直列共振回路では、 R は小さい方がよい（究極の状態は直列接続された抵抗が無い状態： $R = 0 \Omega$ ）
- 並列共振回路では、 R が大きい方がよい（究極の状態は並列接続された抵抗が無い状態： $R = \infty \Omega$ ）

ということは、

最初から抵抗なんか接続せずに、LC 直列共振回路、LC 並列共振回路にすればよい

のである。そうすれば共振特性の鋭さを表す Q 値は無限大となり、究極の鋭さを持つ回路を作ることができる*3。

では、なぜ、わざわざ抵抗の入った回路について勉強したのか？その理由は、

現実の回路素子を用いた場合には、コイルとコンデンサだけを接続したつもりでも、必ず抵抗成分が存在する

からである。これについて、次節で説明する。

*3 そのような回路を第 6 章の共振回路の紹介の節で既に示している

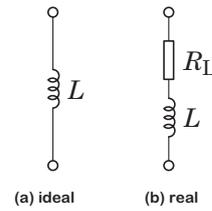


図 7.15 コイルの理想と現実.

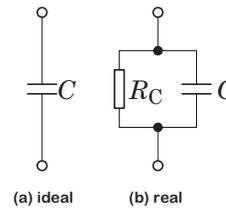


図 7.16 コンデンサの理想と現実.

7.11 コイルとコンデンサの理想と現実

コイル、コンデンサと思って回路素子をつなげても実際のコイルとコンデンサには、図 7.15、図 7.16 に示すように、抵抗成分が含まれている。抵抗成分のあるコイルやコンデンサを損失のあるコイル、損失のあるコンデンサという言い方をする。

7.11.1 現実のコイルに内在する抵抗成分

コイルに内在する抵抗は、コイルの導線の抵抗成分である。導線は電流を流すことを目的としたものであるから、その抵抗成分は回路素子として利用される抵抗の抵抗値と比較すると極めて小さいものになっているがゼロではない。共振回路の特性を考えるときには、この小さいがゼロではない抵抗成分が無視できないのである。

具体的に販売されているコイルの特性をカタログをみて確認してみよう。図 7.17 は、TDK が販売しているコイルのカタログの一部である [1]。コイルのカタログであるから、インダクタンスがいくらか、という表が示されているが、同時に直流抵抗成分も記されていることを確認することができる。例えば、1 mH のインダクタンスの場合には、約 1 Ω の抵抗成分が含まれていることがわかる。

電気的特性

インダクタンス (μH)	インダクタンス 許容差	直流抵抗 (Ω)max.
10	$\pm 10\%$	0.019
15	$\pm 10\%$	0.022
22	$\pm 10\%$	0.031
33	$\pm 10\%$	0.044
47	$\pm 10\%$	0.059
68	$\pm 10\%$	0.073
100	$\pm 10\%$	0.1
150	$\pm 10\%$	0.15
220	$\pm 10\%$	0.26
330	$\pm 10\%$	0.32
470	$\pm 10\%$	0.48
680	$\pm 10\%$	0.73
1000	$\pm 10\%$	0.96
1500	$\pm 10\%$	1.4
2200	$\pm 10\%$	2.5
3300	$\pm 10\%$	3.3
5600	$\pm 10\%$	6.4



図 7.17 現実のコイル (TDK) [1].

品番	交流定格 電圧 (V _{ac})	温度 特性	静電容量 (pF)
DEJE3E2102Z□□□	250	E	1000 +80/-20%
DEJE3E2222Z□□□	250	E	2200 +80/-20%
DEJE3E2332Z□□□	250	E	3300 +80/-20%
DEJE3E2472Z□□□	250	E	4700 +80/-20%
DEJF3E2472Z□□□	250	F	4700 +80/-20%
DEJF3E2103Z□□□	250	F	10000 +80/-20%

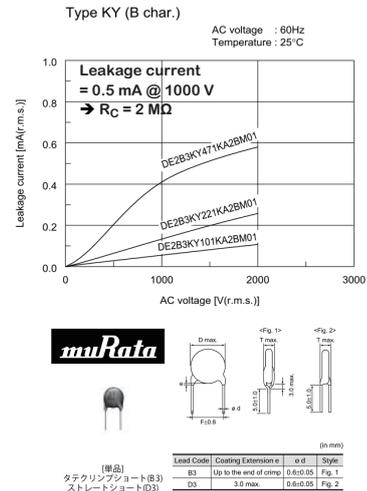


図 7.18 現実のコンデンサ (村田製作所) [2].

7.11.2 現実のコンデンサに内在する抵抗成分

コンデンサに内在する抵抗は、コンデンサの漏れ電流成分によるものである。コンデンサは二つの電極を向かい合わせたものであり、理想的コンデンサは直流的には絶縁体であるはずである。しかし、実際にコンデンサを作ると、電極間を直流電流が流れてしまうのである。この直流電流が流れてしまう、という状況を回路で表すと、理想的なコンデンサと並列に抵抗成分がある、という形で表される。この漏れ電流は極めて微々たるものであるが、現実的には、ゼロにすることができない。これを並列抵抗成分の値で言い表せば、並列抵抗成分は極めて大きい、無限大にはできない、となる。

具体的に販売されているコンデンサの特性をカタログをみて確認してみよう。図 7.18 は、村田製作所が販売しているコンデンサのカタログの一部である [2]。コンデンサのカタログであるから、キャパシタンスがいくらか、という表が示されているが、同時に印加電圧に対する漏れ電流がいくらか、という情報も記されていることが確認できる。1000 V 印加時に漏れ電流が 0.5 mA 程度あるということは、約 2 M Ω の並列抵抗成分がある、ということの意味する。

7.12 現実の LC 共振回路の RLC 等価回路

現実には売られているコイルとコンデンサだけを接続した回路であっても、抵抗成分が潜んでいることを既に述べた。ここでは、その抵抗成分を考慮すると、以下のようにならざるを得ない、ということを示す。

- 現実の LC 直列回路は、図 7.19 に示すように、等価的に RLC 直列共振回路にすることができる。
- 現実の LC 並列回路は、図 7.20 に示すように、等価的に RLC 並列共振回路にすることができる。

このことを示すためには、多少準備が必要となる。そのため、以下の二つの節ではその準備を行い、その後、本番の説明を行う。

7.12.1 コイルとコンデンサの Q_x 値の定義

Q 値は、共振回路全体に対して定義されたものであったが、ここでは、コイルとコンデンサの単独の場合の Q_x 値を定義する。

図 7.15 に示したようなコイルの場合、コイルの Q_x

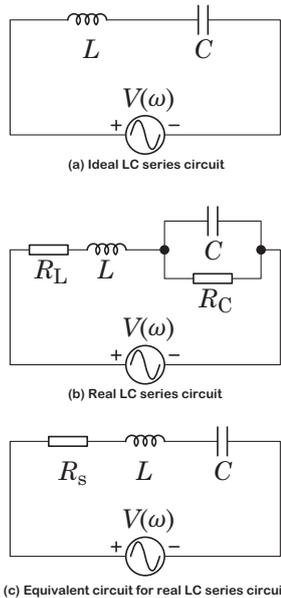


図 7.19 (a) 理想的な LC 直列回路, (b) 現実の LC 直列回路, (c) 現実の LC 直列回路の等価回路.

共振回路全体の Q 値は, 周波数 ω によらず, L, C, R だけで決まる定数であった. これに対し, ここで定義したコイルやコンデンサの単独の Q_X 値は, 式からわかるように, 一般的には ω に依存する.

しかし, ここで定義した Q_X 値は, ほとんどの場合, 共振周波数 ω_0 の近傍だけの議論で用いる. そのため, 議論する周波数帯域を共振周波数の近傍だけに限定し, 有効数字が 2~3 桁の議論であれば (普通はそうである), ω を ω_0 (一定) としてしまっても全く問題が無い*4. 即ち, 上記のように限定されれば, Q_X 値を以下のようにしてしまってもよいのである.

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_L}, \quad (7.20)$$

$$Q_C = \frac{\omega_0 C}{G_C}. \quad (7.21)$$

以下では, このようにしてしまってもよい条件下での説明をする.

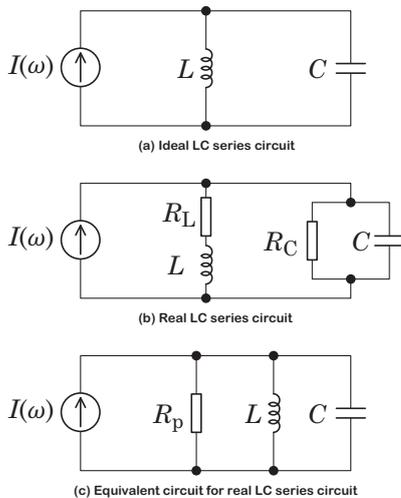


図 7.20 (a) 理想的な LC 並列回路, (b) 現実の LC 並列回路, (c) 現実の LC 並列回路の等価回路.

7.12.2 抵抗成分を有するリアクタンスの直列接続表現と並列接続表現の等価変換

現実のコイルには直列抵抗成分が, 現実のコンデンサには並列抵抗成分が, それぞれ含まれている. 従って, 現実のコイルとコンデンサを図 7.19(a) や図 7.20(a) のように接続したつもりであっても, 実際には, 図 7.19(b) の図 7.20(b) のような等価回路で考えなければならない. この置き換えは, ほとんど頭を使う必要が無いので容易に理解できるであろう.

しかし, これらの回路を既に学んだ RLC 直列回路, RLC 並列回路にする, 即ち, 図 7.19(b) や図 7.20(b) を図 7.19(c) や図 7.20(c) にするためには, 少し頭を使わねばならない.

即ち, 現実の LC 直列回路を RLC 直列共振回路にするためには, 並列抵抗成分を有するコンデンサを図 7.21 に示すように等価な直列接続に変換をしなければならない. また, 現実の LC 並列回路を RLC 並列共振回路にするためには, 直列抵抗成分を有するコイルを図 7.22

値は, 以下のように定義されている.

$$Q_L = \frac{|\text{リアクタンス成分}|}{\text{抵抗成分}} = \frac{\omega L}{R_L}. \quad (7.18)$$

図 7.16 に示したようなコンデンサの Q_X 値は, 以下のように定義されている.

$$Q_C = \frac{|\text{サセプタンス成分}|}{\text{コンダクタンス成分}} = \frac{\omega C}{G_C}. \quad (7.19)$$

ここで, $G_C = 1/R_C$ である.

*4 「問題が無い」とは, $x.xx \times 10^y$ と求められるべき数値があったとすると, その 4 桁目以降にしか影響を与えない (四捨五入の影響を考えると, 厳密には 5 桁目以降となるかな), ということの意味する. グラフ用紙に特性を描けば, 描いた曲線の線の太さぐらいの影響しかない, ということである. 工学ではこうした有効数字を考慮した具体的な近似の感覚を身につける必要があると思われる.

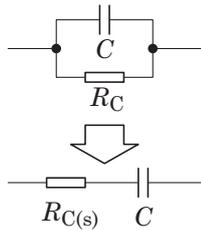


図 7.21 現実の LC 直列回路を RLC 直列回路で等価的に表すためには、並列抵抗成分を有するコンデンサを抵抗とコンデンサの直列回路に変換する必要がある。

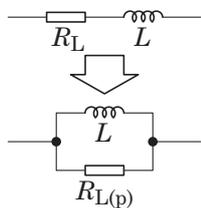


図 7.22 現実の LC 並列回路を RLC 並列回路で等価的に表すためには、直列抵抗成分を有するコイルを抵抗とコイルの並列回路に変換する必要がある。

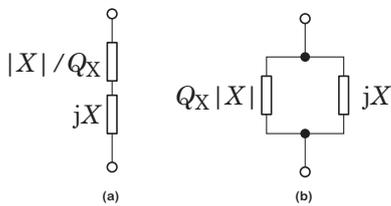


図 7.23 Q_X を用いた損失のある回路素子の等価回路。

に示すように等価な並列接続に変換をしなければならない。

以下では、この変換を近似を用いて行う手法について述べる。従って、厳密にいうと完璧な変換にはならない。しかし、後述するように、実用上は問題の無い変換ができるのである。

結論から先に言うと、抵抗成分のあるコイルやコンデンサを、近似的ではあるが図 7.23 のように、直列・並列のどちらの回路でも等価的に表すことができるのである。このとき、便宜上(すっきりと表すことができるので)、前節で導入した Q_X 値を使って抵抗成分を表している。

以下に、図 7.23 (a), (b) に示した二つの回路が近似的

に等価であることを示す。具体的には、図 7.23 (b) に示した並列回路のインピーダンスが図 7.23 (a) に示した直列回路のインピーダンスと同じになる、ということを示す。

図 7.23 (b) に示した並列回路のインピーダンスは、

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{jX} + \frac{1}{Q_X|X|}} = \frac{jX}{1 + j\frac{1}{Q_X}\frac{X}{|X|}} \quad (7.22)$$

となる。 Q_X は本来 1 よりも十分に大きいはずであるから*5, $1/Q \ll 1$ となるはずである。また、 $X/|X|$ の絶対値は 1 である。従って、 $|w| \ll 1$ なる w についてなりたつ近似式

$$(1+w)^{-1} \approx 1-w \quad (7.23)$$

を用いれば、

$$Z \approx jX \left(1 - j\frac{X}{Q_X|X|} \right) = \frac{|X|}{Q_X} + jX \quad (7.24)$$

となる。この式を見れば、この式が表すインピーダンスの回路が図 7.23 (a) になっていることはすぐにわかるであろう。

7.12.3 現実の LC 回路の等価的な RLC 回路への置き換え

前節のような変換を用いれば、図 7.21 と図 7.22 に示した変換が可能となる。即ち、図 7.21 に示すように、並列抵抗成分を含む現実のコンデンサを等価的に直列抵抗とコンデンサで表したときの $R_{C(s)}$ は、以下のようになる。

$$R_{C(s)} = \frac{R_C}{Q_C^2} \quad (7.25)$$

また、図 7.22 に示すように、直列抵抗成分を含む現実のコイルを等価的に並列抵抗とコイルで表したときの $R_{L(p)}$ は、以下のようになる。

$$R_{L(p)} = Q_L^2 R_L \quad (7.26)$$

従って、現実の LC 回路の抵抗成分を考慮した RLC 回路(図 7.19 と図 7.20)における R_s と R_p は、それぞれ

*5 普通は、コイルの直列抵抗は ωL よりも十分小さく、コンデンサの並列抵抗は $1/\omega C$ よりも十分大きい。これが成り立たない周波数領域や回路素子定数の場合には、このような近似はできない。

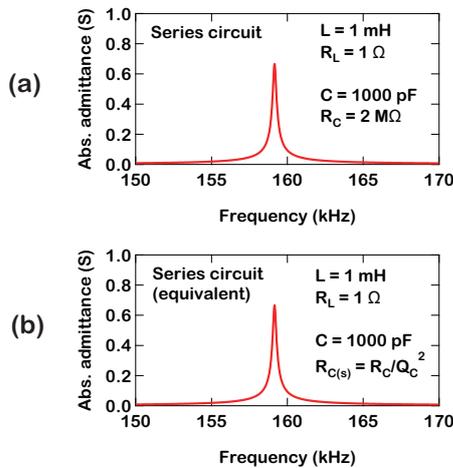


図 7.24 (a) 抵抗成分を持つ現実の LC 直列回路の近似無し
の周波数特性と (b) それを等価的に RLC 直列回路に
変換した回路の周波数特性。

れ、以下のようになる。

$$R_s = R_L + R_{C(s)} = R_L + \frac{R_C}{Q_L^2}, \quad (7.27)$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_{L(p)}} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{Q_L^2 R_L}. \quad (7.28)$$

即ち、上記のような抵抗成分を用いれば、既に学んだ RLC 直列・並列回路を用いて現実の LC 直列・並列回路を扱うことができるのである。

なお、注意して欲しい点は、上記の議論にて「はずである」が何度も出ていた点である。これはあくまでも近似であり、「はずである」が成り立たない条件下では、上記のような近似は出来ない、ということを理解しておいて欲しい。

「はずである」が成り立っている場合には、上記の近似が成り立つのであるが、本当に成り立っているかどうかを数値的に確認してみよう。確認のために用いた回路素子の定数は、先述の具体的なコイルとコンデンサのカタログ値から抜粋した。即ち、 $L = 1 \text{ mH}$ 、 $R_L = 1 \Omega$ 、 $C = 1000 \text{ pF}$ 、 $R_C = 2 \text{ M}\Omega$ である。共振周波数（角周波数）は、抵抗成分の有無にかかわらず、 L と C だけで決まり、 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^6 \text{ rad/s}$ となる。普通の周波数に直せば、 $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 159 \text{ kHz}$ となる。従って、計算する周波数帯域は、この 160 kHz 近辺を計算すればよい。

図 7.24 (a) と (b) は、それぞれ、現実の LC 直列回路

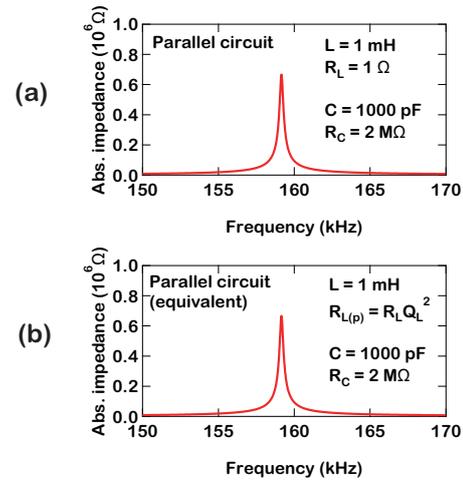


図 7.25 (a) 抵抗成分を持つ現実の LC 並列回路の近似無し
の周波数特性と (b) それを等価的に RLC 並列回路に
変換した回路の周波数特性。

の周波数特性を近似無しで計算した結果と、図 7.19 (c) に示したような等価回路に近似して計算した周波数特性である。両者を比較すれば、大差が無いことがわかる。また、図 7.25 (a) と (b) は、それぞれ、現実の LC 並列回路の周波数特性を近似無しで計算した結果と、図 7.20 (c) に示したような等価回路に近似して計算した周波数特性である。両者を比較すれば、この場合も、大差が無いことがわかる。

課題

RLC 直列共振回路の Q と R, L, C の関係を導出せよ。

略解

回路全体のアドミタンスの大きさが、共振周波数 ω_0 における極大値 (最大値でもある) に対して $1/\sqrt{2}$ となる周波数 (角周波数) ω_1 と ω_2 を求め、 Q 値の定義式 (7.15) 代入すればよい。

RLC 直列共振回路のインピーダンスの絶対値は、次式で与えられる。

$$|Z_s| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (7.29)$$

従って、アドミタンスの絶対値は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} |Y_s| &= \frac{1}{|Z_s|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

共振周波数 ω_0 のときに、

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad (7.31)$$

となり、 $|Y_s|$ が極大値 (最大値) をとる。その大きさは、

$$|Y_{s0}| = \frac{1}{R} \quad (7.32)$$

となる。一方、 Q の定義から、 $\omega = \omega_1, \omega_2$ のとき、

$$\frac{|Y_s|}{|Y_{s0}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.33)$$

であるから、このようになる ω_1 と ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) を求めて、 Q の定義式に代入すればよい。

$|Y_s|/|Y_{s0}|$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{|Y_s|}{|Y_{s0}|} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \end{aligned} \quad (7.34)$$

であるから、以下のようになる ω を求めればよい。

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = \pm 1. \quad (7.35)$$

まず、

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = +1 \quad (7.36)$$

となる ω を求めてみよう。上式を変形すると、

$$\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (7.37)$$

となる。この二次方程式の解を求めると、

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\} \quad (7.38)$$

となる。 ω が負の解は物理的には意味が無いので、 ω が正となる解を選ぶことになる。上の解のうち ω が正となるのは、 \pm の符号が $+$ のときである。従って、上記の二次方程式の解のうち、物理的に意味のある解は、以下の一つとなる。

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\}. \quad (7.39)$$

ここで、この ω が Q 値の定義式における ω_1 なのか、 ω_2 なのかを判定しておく必要がある。そのためには、上式で表される ω が式 (7.4) で与えられる直列共振周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きいのか、小さいのか、を判定する必要がある。上式の $4/LC$ の 4 をルートの外に出すと、 $1/\sqrt{LC}$ という式が現れるため、その判定がし易い。即ち、

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (7.40)$$

となるので、この ω は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きい、ということがわかる。従って、この ω は、 Q 値の定義における ω_2 の方である。即ち、

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\} \quad (7.41)$$

となる。

次に、

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = -1 \quad (7.42)$$

となる ω を求めてみよう (これが ω_1 になるはず)。先ほどと同様に上式を変形すれば、次式が得られる。

$$\omega^2 + \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0. \quad (7.43)$$

この二次方程式の解は、次式の通りである。

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\}. \quad (7.44)$$

先ほどと同様に、物理的に意味のある正の ω 選ぶことになる。この式では、 \pm 符号の $+$ の時に正の ω になることがわかる。従って、物理的に意味のある解は、以下の通りとなる。

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\}. \quad (7.45)$$

既に $\omega_2 (> \omega_0)$ の方が求められているので、上式の ω が $\omega_1 (< \omega_0)$ であろう、ということは容易に推測されるが、きちっと確かめてみよう。少しだけ式変形をすると、

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (7.46)$$

となる。これより、この ω が $1/\sqrt{LC}$ よりも小さい、ということがわかる。即ち、この ω は Q 値の定義式の中の ω_1 の方となる。即ち

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\} \quad (7.47)$$

となる。

以上の計算で得られた ω_1 と ω_2 を用いて $\omega_2 - \omega_1$ を計算すると、

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad (7.48)$$

となる。従って、これを Q 値の定義式 (7.15) に代入すれば、

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (7.49)$$

となる。ここで、 ω が共振周波数 ω_0 の場合には、

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (7.50)$$

であることを利用すると、以下のようにも書くことができる。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \quad (7.51)$$

また、式 (7.4) で示したように $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であることを利用すれば、以下のように書くこともできる。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.52)$$

課題

RLC 並列共振回路の Q と R, L, C の関係を導出せよ。

略解

RLC 並列共振回路のアドミタンスの絶対値は、次式で与えられる。

$$|Y_p| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (7.53)$$

従って、インピーダンスの絶対値は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} |Z_p| &= \frac{1}{|Y_p|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

共振周波数 ω_0 のときに、

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \quad (7.55)$$

となり、 $|Z_p|$ が極大値 (最大値) をとる。その大きさは、

$$|Z_{p0}| = R \quad (7.56)$$

となる。一方、 Q の定義から、 $\omega = \omega_1, \omega_2$ のとき、

$$\frac{|Z_p|}{|Z_{p0}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.57)$$

であるから、このようになる ω_1 と ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) を求めて、 Q の定義式に代入すればよい。

$|Z_p|/|Z_{p0}|$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{|Z_p|}{|Z_{p0}|} &= \frac{1}{R \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 R^2}} \end{aligned} \quad (7.58)$$

であるから、以下のようになる ω を求めればよい。

$$R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm 1. \quad (7.59)$$

まず、

$$R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = +1 \quad (7.60)$$

となる ω を求めよう。上式を変形すると、

$$\omega^2 L C R - \omega L - R = 0 \quad (7.61)$$

となる。この二次方程式の解を求めると、

$$\omega = \frac{1}{2LCR} \left\{ L \pm \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\} \quad (7.62)$$

となる。 ω が負の解は物理的には意味が無いので、 ω が正となる解を選ぶことになる。上の解のうち ω が正となるのは、 \pm の符号が $+$ のときである。従って、上記の二次方程式の解のうち、物理的に意味のある解は、以下の一つとなる。

$$\omega = \frac{1}{2LCR} \left\{ L + \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\}. \quad (7.63)$$

ここで、この ω が Q 値の定義式における ω_1 なのか、 ω_2 なのかを判定しておく必要がある。そのためには、上式で表される ω が式 (7.11) で与えられる並列共振周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きいか、小さいか、を判定する必要がある。上式の $4/LC$ の 4 をルートの外に出すと、 $1/\sqrt{LC}$ という式が現れるため、その判定がし易い。即ち、

$$\omega = \frac{1}{2CR} + \sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (7.64)$$

となるので、この ω が $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きい、ということがわかる。従って、この ω は、 Q 値の定義における ω_2 の方である。即ち、

$$\omega_2 = \frac{1}{2LCR} \left\{ L + \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\} \quad (7.65)$$

となる。

次に、

$$R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = -1 \quad (7.66)$$

となる ω を求めよう (これが ω_1 になるはず)。先ほどと同様に上式を変形すれば、次式が得られる。

$$\omega^2 LCR + \omega L - R = 0. \quad (7.67)$$

この二次方程式の解は、次式の通りである。

$$\omega = \frac{1}{2LCR} \left\{ -L \pm \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\}. \quad (7.68)$$

先ほどと同様に、物理的に意味のある正の ω 選ぶことになる。この式では、 \pm 符号の $+$ の時に正の ω になることがわかる。従って、物理的に意味のある解は、以下の通りとなる。

$$\omega = \frac{1}{2LCR} \left\{ -L + \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\}. \quad (7.69)$$

既に $\omega_2 (> \omega_0)$ の方が求められているので、上式の ω が $\omega_1 (< \omega_0)$ であろう、ということは容易に推測されるが、きちっと確かめてみよう。少しだけ式変形をすると、

$$\omega = -\frac{1}{2CR} + \sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (7.70)$$

となる。これより、この ω が $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも小さい、ということがわかる。即ち、この ω が Q 値の定義式の中の ω_1 の方となる。即ち、

$$\omega_1 = \frac{1}{2LCR} \left\{ -L + \sqrt{L^2 + 4LCR^2} \right\} \quad (7.71)$$

となる。

以上の計算で得られた ω_1 と ω_2 を用いて $\omega_2 - \omega_1$ を計算すると、

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{CR} \quad (7.72)$$

となる。従って、これを Q 値の定義式 (7.15) に代入すれば、

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \omega_0 CR \quad (7.73)$$

となる。ここで、 ω が共振周波数 ω_0 の場合には、

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (7.74)$$

であることを利用すると、以下のようにも書くことができる。

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L}. \quad (7.75)$$

また、式 (7.11) で示したように $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であることを利用すれば、以下のようにも書くことができる。

$$Q = \omega_0 CR = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (7.76)$$

豆知識

豆知識

「実用公式」

工学分野では、普段よく使う単位で表した数値を入れれば、普段よく使う単位の計算結果が得られる実用公式を使うことがある。LC共振回路の共振周波数(角周波数ではなく、普通の周波数)を求める実用公式としては、以下のものが教科書に紹介されている。

$$f_0 = \frac{5.033}{\sqrt{L[\text{mH}] C[\text{pF}]}} \text{ [MHz]} \quad (7.77)$$

豆知識

「損失率 d 」

図 7.23 に示したような抵抗成分を有するリアクタンス(即ち、損失のあるリアクタンス)について、損失率 d なるものが次式で定義されている。

$$d = \frac{1}{Q_X} \quad (7.78)$$

損失率 d は、近似的には複素電力の章で学んだ力率と同義である、ということが以下のようにして導かれる。

図 7.23 (a) に注目すると、このインピーダンスで消費される電力の力率は、次式で与えられる。

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (7.79)$$

ここで、 $R = |X|/Q_X$ とした。これを計算すると、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{X^2}{R^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q_X^2 \left(\frac{X}{|X|}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q_X^2}} \end{aligned} \quad (7.80)$$

ここで、 $Q_X \gg 1$ であるから、以下のような近似ができる。

$$\cos\theta \approx \frac{1}{\sqrt{Q_X^2}} = \frac{1}{Q_X} \quad (7.81)$$

豆知識

「なぜ $1/\sqrt{2}$ ？」

共振特性のピークの幅を定義するとき、なぜ「 $1/\sqrt{2}$ になる場所」にするのであろうか？一般には、ピークの鋭さを表す指標を定義するときには、「 $1/2$ になる場所」を使い、「半値幅 (full width at half maximum: FWHM)」と呼ばれている。電気回路では、電流、電圧、インピーダンス、アドミタンスなどが $1/2$ になる場所ではなく、 $1/\sqrt{2}$ になる場所を使う。その理由は、

電気信号の FWHM を定義するときは、電圧や電流が $1/2$ になる周波数を使って計算するよりも、電力が $1/2$ になる周波数を使って計算した方が意味があるから、

である。

「電力が $1/2$ になる周波数の方が意味がある」とはどういうことだろうか。電気信号によってある場所からある場所に情報伝送する場合を考えてみよう。このとき、情報伝送を担っている「ある物理量」が伝送されるが、その伝送される「ある物理量」とは、電圧や電流ではなく「電力」なのである*6。従って、電圧や電流、インピーダンスやアドミタンスの周波数依存性から伝送される物理量の FWHM を計算するときは、「 $1/2$ になる周波数」とするよりは、「 $1/\sqrt{2}$ になる周波数」とする方が適切である、という考え方が採用されている。

豆知識

「フーリエ級数展開」

任意の周期関数は、異なる周波数の三角関数の無限級数で表すことができる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \}. \quad (7.82)$$

或いは、等価な式として、以下のような表し方もある。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n). \quad (7.83)$$

但し、

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (7.84)$$

$$\phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \quad (7.85)$$

*6 これについて説明すると長くなるので、他の書物等で確認して欲しい。

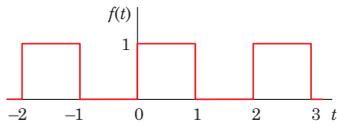


図 7.26 矩形波の例.

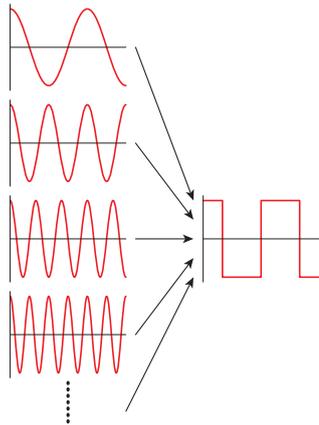


図 7.27 異なる周波数の sin 関数の足し合わせによる矩形波の合成の概念図.

また、複素数を指数部に持つ指数関数で表す方式もある.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (7.86)$$

但し,

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = |c_n| \angle \phi_n, \quad (7.87)$$

$$|c_n| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, \quad (7.88)$$

$$\phi_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right). \quad (7.89)$$

例えば、図 7.26 に示すような矩形波は、次式で与えられる.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\pi t] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi t) \\ &\quad + \frac{2}{5\pi} \sin(5\pi t) + \dots \end{aligned} \quad (7.90)$$

概念的には、図 7.27 に示したようなイメージである.

実際に、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ まで足し算した結果を図 7.28 に示す. 足し合わせの上限が大きくなるに従い、矩形波に近づいていることがわかる. $n = 0$ も加えて $n = 10$ ま

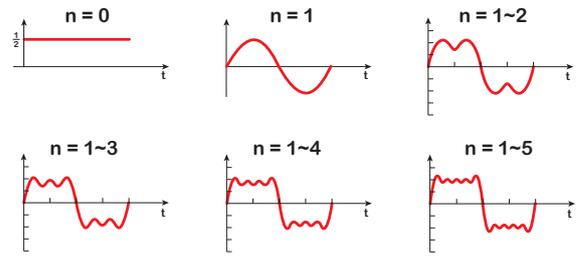


図 7.28 $n = 0$ と、 $n = 1$ から $n = 5$ まで sin 関数の足し合わせをした計算結果.

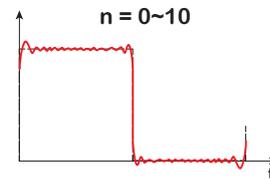


図 7.29 $n = 0$ から $n = 10$ まで sin 関数の足し合わせをした計算結果.

で足し合わせれば、図 7.29 のようになり、ほぼ矩形波を再現していることがわかる.

以上の例は、フーリエ級数展開の一例でしかない. フーリエ級数展開の理論を学べば、任意の周期的波形を異なる周波数の正弦波の級数和として表すことができる、ということを知ることになる. こうしたことを知ると、波形の特徴を表す方法として、横軸に時間を、縦軸にその波形が表す物理量をプロットした波形そのもので表す従来の方法以外の方法がある、ということに気づいて欲しい. 即ち、級数和をとっている各周波数成分の大きさや、位相を用いて表す方法である. 先に示した矩形波の例を用いて説明してみよう. 矩形波のフーリエ級数展開は、式で書けば以下ようになる.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\pi t] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \end{aligned} \quad (7.91)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| \\ &= \begin{cases} 2/(n\pi) & (n = \text{odd}) \\ 0 & (n = \text{even}) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.92)$$

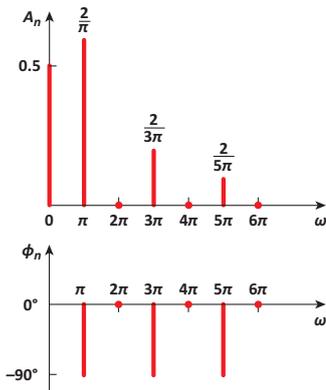


図 7.30 矩形波のスペクトル.

$$\phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} -90^\circ & (n = \text{odd}) \\ 0^\circ & (n = \text{even}) \end{cases} \quad (7.93)$$

ここで、横軸に $\omega (= n\omega_0)$ をとり、縦軸に A_n と ϕ_n をとって A_n と ϕ_n をプロットすると、図 7.30 のようになる。この図は、矩形波の形そのものを表すものではないが、矩形波の中に

どのような周波数成分がどれくらいの割合で含まれているか、

ということを表す特性図になっており、矩形波という波形を別の側面を見たときの特徴を表したものとなっている*7。このような特性図を「スペクトル (spectrum)」という。

なお、図 7.31 に示すように、任意の波形からスペクトル取得する専用の装置がある [3]。それを「スペクトルアナライザ (spectrum analyzer)」という。

豆知識

「フィルタ回路の必要性」

フィルタ回路が最も活躍しているのは電波通信の分野であろう。放送局からある特定の周波数で信号が発振され、それを受信しようとするときにこのフィルタ回路が使われる。そのとき、根本原理となるのが、フーリエ級数展開の論理に基づく以下の原理である。

*7 横軸を時間にした特性を「時間領域の特性」、横軸を周波数にした特性を「周波数領域の特性」などという。

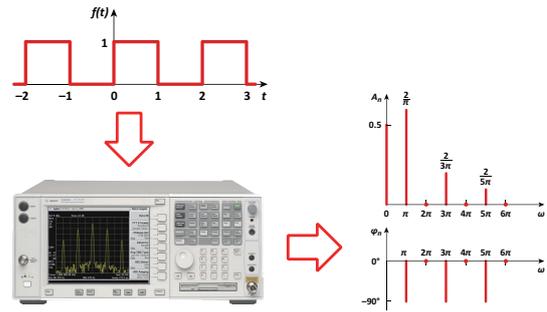


図 7.31 スペクトルアナライザ [3].

Band-pass filter = Select desired-frequency component(s)
→ Noise Reduction or Signal Detection

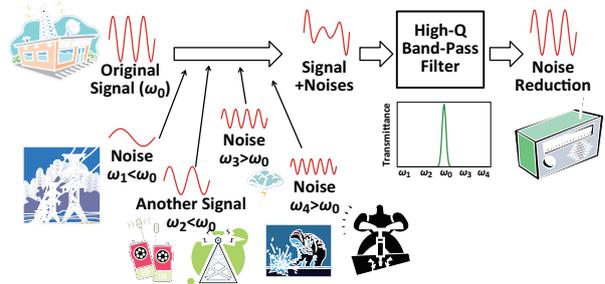


図 7.32 電波受信時のフィルタ回路の効能.

異なる周波数の波形の和を取ると複雑な波形になるが、その複雑な波形から特定の周波数成分だけを抽出することができる。

即ち、複数の放送局から電波を発信する場合、異なる周波数で発信すれば、受信時にそれらが和となって受信されたとしても、必要な周波数成分だけを抽出できるのである*8。

「必要な周波数成分だけを抽出する」ということを、図 7.33 を用いてもう少し具体的に説明しよう。まず、受信信号を電源とする。例えば、電流源とする。その受信信号には、同図の左側に示すように、500 rad/s, 1000 rad/s, 1500 rad/s の三つの周波数成分が含まれているとする。ここで、必要とする周波数成分は 1000 rad/s の成分であるとする。受信信号そのものの波形は、これら三つの周波数成分の和となっており、同図の左下のような波形になっている。このような波形の電流源を並列共振回路につなげたとしよう (即ち、この受信信号を並列

*8 同じ周波数の信号の和を取ってしまった場合には、もとの信号に復元することは不可能である。

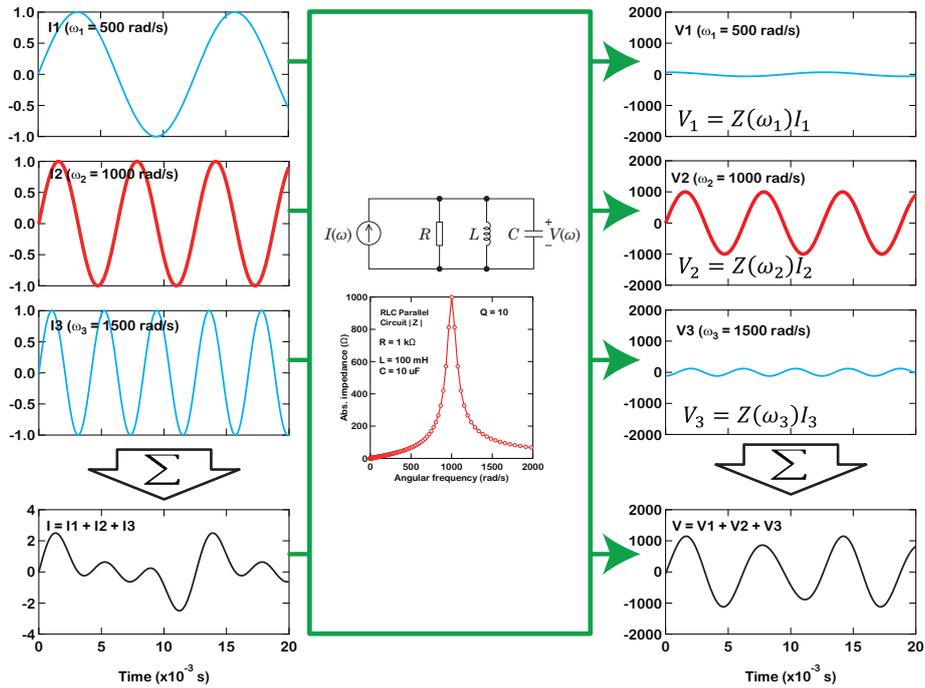


図 7.33 並列共振回路を用いて特定の周波数成分を抽出することを説明するための概念図.

共振回路に入力した, ということに相当する). なお, この共振回路は, その共振周波数が, 必要とする成分の周波数 (1000 rad/s) となるように回路素子を選んでもよいとする.

このとき, 共振回路の端子間電圧は, 各周波数の電流についてオームの法則を適用して得られる電圧の和となる. 但し, インピーダンスの値は, 同図の中心に描いてあるように各周波数毎に異なる. 従って, 同図右側に示したように, インピーダンスが小さい周波数の場合には, その周波数成分の電圧は小さくなり, インピーダンスが大きい周波数の場合には, その周波数成分の電圧は大きくなる. 実際に計測される端子間電圧は, 周波数の異なる三つの電圧の和であるが, 上記のように, 今回必要とする周波数の成分のみが大きな値を持つため, その和の波形は, 今回必要とする周波数の成分とほぼ似た波形となる. 実際に計算すれば, 同図の右下のような波形になる. もとの 1000 rad/s の電流波形の形と完璧に一致しないのは, 共振特性の Q 値が無限大でないからである. そのため, 他の周波数成分も若干含まれてしまい, もとの 1000 rad/s の波形とは若干異なる. しかし, AM 放送の音声を聞く程度の用途であれば, これぐらいで十

分なのである*9. 以上のようなことが, 「受信信号から共振周波数の成分だけを抽出する」, というコトバの意味するところである.

*9 但し, 音声信号をこの 1000 rad/s の電波にのせて送信する場合には, この 1000 rad/s の波形の振幅を音声信号で振幅変調する. 振幅変調って何や? という人は各自で「電波工学」を勉強して下さい. スピーカーを鳴らすことのできる音声信号に直すには, 必要な周波数成分を取りだした後に, もう一つやらなければならないこと (復調という) があるのである.

事前基盤知識確認事項

[1] インピーダンスの復習と共振の予習

R, L, C で構成される直列回路の合成インピーダンス Z を表す式を書け。角周波数は ω とする。リアクタンス成分 (インピーダンスの虚数部) がゼロになるときの角周波数 ω_0 を L, C を用いて表せ。

略解

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \end{aligned}$$

これより、リアクタンスがゼロになるときの角周波数は、以下のようになる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\omega = \omega_0$ のときにインピーダンスの大きさ (絶対値) は極小値 R となる。

[2] アドミタンスの復習と共振の予習

R, L, C で構成される並列回路の合成アドミタンス Y を表す式を書け。角周波数は ω とする。サセプタンス成分 (アドミタンスの虚数部) がゼロになるときの角周波数 ω_0 を L, C を用いて表せ。

略解

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right). \end{aligned}$$

これより、サセプタンスがゼロになる角周波数 ω_0 は、以下のようになる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\omega = \omega_0$ のときにアドミタンスの大きさ (絶対値) は極小値 $1/R$ となる。

事後学習内容確認事項

A. RLC 直列共振回路

1. RLC 直列回路のインピーダンス

RLC 直列共振回路のインピーダンス Z_s を式で表せ。周波数は ω とする。

略解

$$Z_s = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

2. RLC 直列共振回路の共振周波数

RLC 直列共振回路の共振周波数を示せ。

略解

共振周波数 ω_0 は、 Z_s の虚部がゼロとなる ω である。よって、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3. RLC 直列共振回路の Q 値

RLC 直列共振回路の Q 値の意味を示せ。また、 Q 値を R, L, C を用いて表せ。

略解

$1/|Z_s|$ の周波数依存性をプロットすると ω_0 を中心とする山型の特性を示す。山の鋭さを表す指標が Q 値である。

$1/|Z_s|$ が、最大値の $1/\sqrt{2}$ になる二つの周波数を ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) とするとき、 Q 値は、次式で定義される。

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

これを R, L, C を用いて表すと、かなりの計算をした後に、次式が得られる。

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

従って、直列共振特性は、 R が 小さい ほど鋭くなる。

B. RLC 並列共振回路

1. RLC 並列回路のインピーダンス

RLC 並列共振回路のアドミタンス Y_p を式で表せ。周波数は ω とする。

略解

$$Y_p = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

2. RLC 並列共振回路の共振周波数

RLC 並列共振回路の共振周波数を示せ。

略解

共振周波数 ω_0 は、 Y_p の虚部がゼロとなる ω である。よって、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3. RLC 並列共振回路の Q 値

RLC 並列共振回路の Q 値の意味を示せ。また、 Q 値を R, L, C を用いて表せ。

略解

$1/|Y_p|$ の周波数依存性をプロットすると ω_0 を中心とする山型の特性を示す。山の鋭さを表す指標が Q 値である。

$1/|Y_p|$ が、最大値の $1/\sqrt{2}$ になる二つの周波数を ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) とするとき、 Q 値は、次式で定義される。

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

これを R, L, C を用いて表すと、かなりの計算をした後に、次式が得られる。

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

従って、並列共振特性は、 R が 大きい ほど鋭くなる。

参考文献

- [1] <http://product.tdk.com/inductor/ind/ja/>
- [2] <http://www.murata.co.jp/products/capacitor/>
- [3] <http://www.home.agilent.com/>