第 10 章

回路に関する諸定理

本章では，以下の回路に関する諸定理を学習する．

- **等価電源の定理**
  a. **テブナンの定理**
  b. **ノートンの定理**
- **最大電力供給の定理（インピーダンス整合）**

また，これまで学んだ電気回路の概念の応用編として，陥りやすい誤りなどに関する指摘として，以下の点について触れる．

- 電圧源の並列接続
- 電流源の直列接続

以下の定理類は，当たり前と思っていることに，きちっと理屈を付けたり，名称を付けただけのことであるので，あまり深入りはしないことにする．

重ね合わせ，双対性，相反定理，補償定理

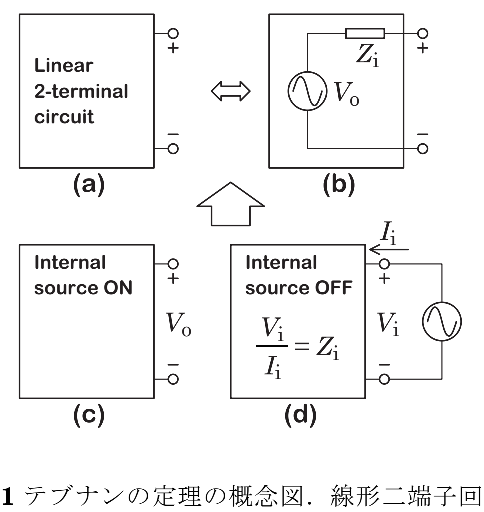


図 10.1 テブナンの定理の概念図．線形二端子回路 (a) は，(b) の回路と等価である．但し，(c) 開放電圧が V_o であり，(d) 内部インピーダンスが Z_i であるとする．

10.1　等価電源の定理

等価電源の定理とは，電源回路が以下に複雑であっても，1 個の電圧源と 1 個のインピーダンスの直列接続で表される (テブナンの定理)，もしくは，1 個の電流源と 1 個のアドミタンス 1 個の並列接続で表される (ノートンの定理)，というものである．

10.1.1　テブナン (Thevenin) の定理

テブナンの定理とは，以下の通りである．

> 線形二端子回路の**開放電圧が** V_o であり，**内部インピーダンスが** Z_i であるとき，その回路は，起電力が V_o の電圧源とインピーダンス Z_i の直列回路と等価である．

10.1.2　テブナン (Thevenin) の定理の例題

図 10.2 (a) に示すような回路をテブナンの定理を用いて，**図 10.2** (b) に示すような回路に変換してみよう．

まず，内部インピーダンスを求める．この問題では，簡単のために抵抗しかない回路を想定しているが，一般のインピーダンスの場合も，計算が複素計算になるだけであり，原理原則は同じである．内部インピーダンスを求めるときは，電源回路内の純粋電源は全て OFF とする．即ち，電圧源は短絡とし，電流源は開放とする．このときの，電源端子 cd から電源側を見たときのインピーダンスが内部インピーダンスである．

電源を全て OFF にした回路を描くと，**図 10.3** のようになる．この回路の合成インピーダンス (この場合は合成抵抗) を求めれば，それが内部インピーダンスとなる．計算は省略するが，

$$R_\mathrm{i} = 4\ \Omega \tag{10.1}$$

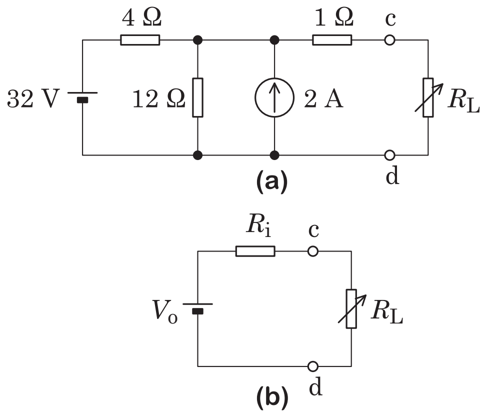


図 10.2 テブナンの定理の例題.

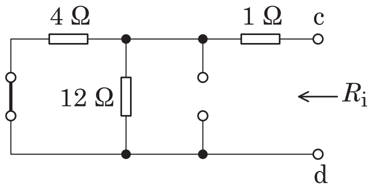


図 10.3 テブナンの定理の例題において，内部の電源を全て OFF して，内部インピーダンスを求めるときの回路の状態.

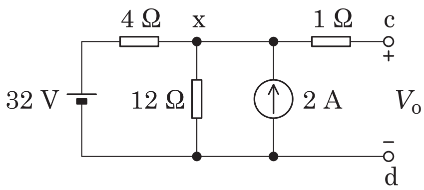


図 10.4 テブナンの定理の例題において，内部の電源を全て ON して，開放電圧を求めるときの回路の状態．端子 cd が開放の場合，端子 c に接続されている 1 Ω の抵抗には電流が流れない (=電圧降下がない) ことに留意すること.

となる.

次に，開放電圧 V_o を求める．開放電圧を求めるときは，内部電源は全て ON にして，電源端子には負荷を接続しない (即ち，端子から電流が出たり，入ったりしない) という状態で端子 cd 間の電圧を求める．この状態の回路図を描くと，**図 10.4** のようになる．このとき注意しなければならない点は，1 Ω の抵抗の両端の電圧である．この抵抗の右側の端子 c は，どこにも接続されていないので，この端子 c に電流の流入・流出は無い．従って，端子 c の左側の抵抗にも電流は流れない．ならば，オームの法則により，この抵抗の両端には電位差が無い (抵抗の右側と左側は同電位)，という点を理解するようにして欲しい．また，同じ理由により，この 1 Ω の抵抗の左側の節点に流れ込む 2 A の電流は，右側の 1 Ω の抵抗側に分岐することはない[*1].

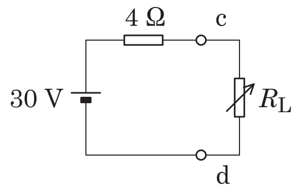


図 10.5 テブナンの定理の例題の等価回路.

以上の点を理解した上で，節点電位法などを用いて端子 cd の電圧 V_{cd} を求めれば，それが開放電圧 V_o となる．先ほどの復習であるが，1 Ω の抵抗の両端が同電位ならば，V_{cd} は V_{xd} と等しい．従って，開放電圧 V_o を求めたければ，節点電位法で V_{xd} を求めればよい.

まず，基準節点を d とする．即ち，節点 d の電位 V_d を 0 V とする．端子 xd 間の電位差は，$V_{xd} = V_x - V_d = V_x$ であるから，V_x を求めればよいことになる．節点 x において「流入=流出」という節点方程式を (多少くどい形で) 書けば，以下のようになる.

$$2 = \frac{V_x - 32}{4} + \frac{V_x - V_d}{12}. \tag{10.2}$$

$V_d = 0$ であることを用いれば，容易に

$$V_x = 30 \text{ V} \tag{10.3}$$

と求められる．この値が求めるべき V_o の値である.

従って，テブナンの定理によって等価回路を描けば，**図 10.5** のようになる.

10.1.3 ノートン (Norton) の定理

ノートンの定理とは，以下の通りである.

> 線形二端子回路の**短絡電流が** I_s であり，**内部インピーダンスが** Z_i であるとき，その回路は，出力電流が I_s の電流源とインピーダンス Z_i の並列回路と等価である.

[*1] これまでの経験で，多くの学生が正しく理解していないので，くどいようだが，但し書きを書いた.

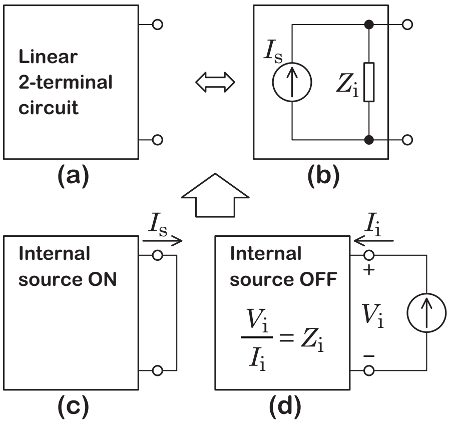


図 10.6 ノートンの定理の概念図．線形二端子回路 (a) は，(b) の回路と等価である．但し，(c) 短絡電流が $\boldsymbol{I_s}$ であり，(d) 内部インピーダンスが $\boldsymbol{Z_i}$ であるとする．

なお，かなりくどいようだが，$Y_i = 1/Z_i$ というアドミタンスを想定し，以下のように言っても同じである．

> 線形二端子回路の**短絡電流が** $\boldsymbol{I_s}$ であり，**内部アドミタンスが** Y_i であるとき，その回路は，出力電流が $\boldsymbol{I_s}$ の電流源とアドミタンス Y_i の並列回路と等価である．

10.1.4 ノートン (Norton) の定理の例題

図 10.7 (a) に示すような回路をテブナンの定理を用いて，**図 10.7** (b) に示すような回路に変換してみよう．

まず，内部インピーダンスを求める．内部インピーダンスを求めるときは，電源回路内の純粋電源は全て OFF とする．即ち，電圧源は短絡とし，電流源は開放とする．このときの，電源端子 cd から電源側を見たときのインピーダンスが内部インピーダンスである．

電源を全て OFF にした回路を描くと，**図 10.8** のようになる．この回路の合成インピーダンス (この場合は合成抵抗) を求めれば，それが内部インピーダンスとなる．計算は省略するが，

$$R_i = 4\ \Omega \tag{10.4}$$

となる．

次に，短絡電流 I_s を求める．短絡電流を求めるときは，内部電源は全て ON にして，電源端子間は導線でつながっている，という状態で端子 c から端子 d に向かって流れる電流を求める．この状態の回路図を描くと，**図**

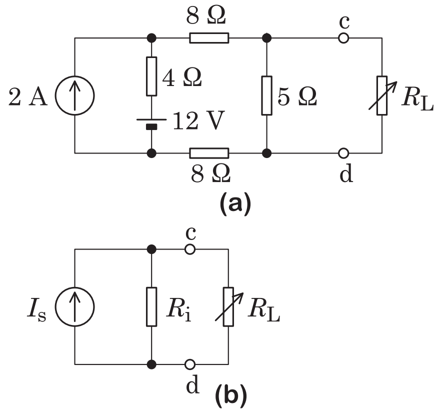


図 10.7 ノートンの定理の例題．

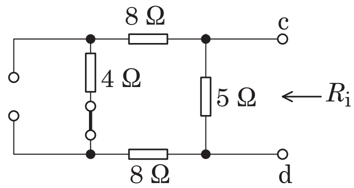


図 10.8 ノートンの定理の例題において，内部の電源を全て OFF して，内部インピーダンスを求めるときの回路の状態．

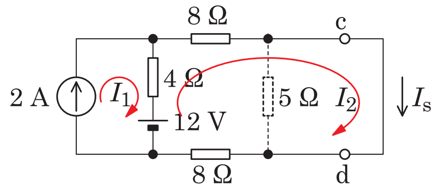


図 10.9 ノートンの定理の例題において，内部の電源を全て ON して，短絡電流を求めるときの回路の状態．

10.9 のようになる．このとき注意しなければならない点は，5 Ω の抵抗の両端の電圧である．この抵抗の両端に相当する端子 cd 間が短絡されているのであるから，この抵抗には電圧がかからない．従って，この抵抗には電流が流れない，即ち，抵抗が無いのと同じ，という点を理解するようにして欲しい．

以上の点を理解した上で，閉路電流法を用いて端子 c から d に向かって流れる電流 I_{cd} を求めれば，それが短絡電流 I_s となる．先ほどの復習であるが，5 Ω の抵抗には電流が流れないのであるから，閉路としては，**図 10.9** に示すような閉路を想定すればよい．このように閉路を

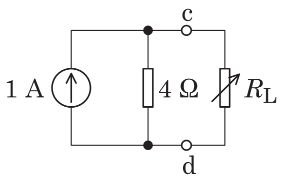


図 10.10 ノートンの定理の例題の等価回路．

想定すれば，閉路 2 の電流 I_2 が求めるべき I_s に相当することになる．

まず，閉路 1 については，2 A の電流源が閉路上にある．ということは，その閉路の電流は，如何なることがあろうと 2 A である．即ち，自動的に $I_1 = 2$ A となる．

次に，閉路 2 の方程式を書くと，

$$12 = 4(I_2 - I_1) + 8I_2 + 8I_2 \tag{10.5}$$

となる．$I_1 = 2$ A を利用すれば，I_2 は容易に求められ，

$$I_2 = 1\ \mathrm{A} \tag{10.6}$$

となる．

従って，ノートンの定理によって等価回路を描けば，**図 10.10** のようになる．

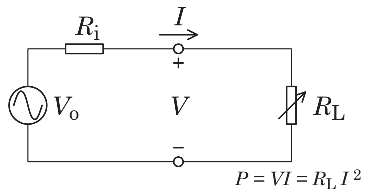
10.2 最大電力供給の定理 (インピーダンス整合)

電源に内部インピーダンスがある場合には，その電源から負荷に供給できる (負荷で消費される) 電力が最大となる最適な負荷インピーダンスが存在する．これが最大供給電力 (maximum power transfer) の定理である．このようにインピーダンスが最適値になっている状態を「**インピーダンス整合**（**インピーダンス・マッチング; impedance matching**）」がなされた状態などと表現する．最大電力が得られるようにインピーダンスを調整する作業ことを「**インピーダンス整合をとる**」，或いは単に「整合をとる (マッチングをとる)」などと表現する．

10.2.1 抵抗の場合

図 10.11 (a) に示すように，電源の内部インピーダンスが抵抗だけであり (R_i とする)，負荷も抵抗だけの場合 (R_L とする)，その抵抗負荷に最大電力が供給される条件，即ち，その抵抗負荷での消費電力が最大となる条

(a)



(b)

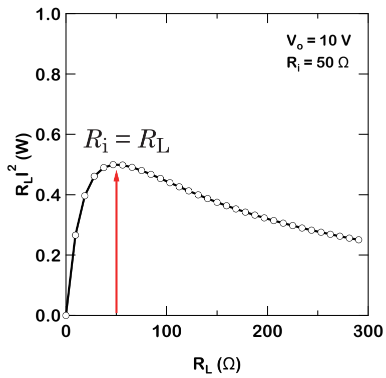


図 10.11 (a) 内部抵抗 R_i を有する電源と抵抗負荷 R_L の回路．(b) $R_i = 50$ Ω の電源を用いたときの，負荷抵抗における消費電力の負荷抵抗値依存性．$R_i = R_L$ の時に最大となっている．

件は，以下の通りである．

$$R_i = R_L \tag{10.7}$$

即ち，電源の内部抵抗値と負荷の抵抗値が一致しているときに，最大電力が供給される (負荷での消費電力が最大となる)．

実際に $R_i = 50$ Ω の内部抵抗を持つ電源に抵抗負荷 R_L を接続し，R_L を 0 Ω から 300 Ω まで変化させたときの負荷抵抗での消費電力の R_L 依存性を図示すると**図 10.11** (b) のようになり，$R_L = R_i$ で最大電力となっていることが確認できる．数学的な証明については，本章末の付録に記した．

10.2.2 一般のインピーダンスの場合

ここでは，**図 10.12** に示すように，電源の内部インピーダンスが抵抗だけではなく，リアクタンス成分 (C や L) も含む一般的なインピーダンスであり，負荷も一般的なインピーダンスの場合のインピーダンス整合について述べる．電源の内部インピーダンスと負荷のイン

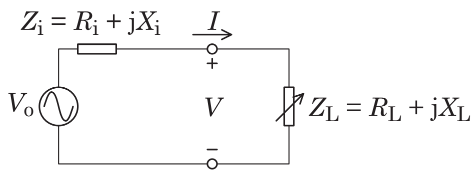


図 10.12 電源の内部のインピーダンスと負荷が抵抗だけではなく，一般的なインピーダンスになった場合のインピーダンス整合は，$Z_\mathrm{i} = Z_\mathrm{L}^*$ の時に成立する．即ち，負荷インピーダンスと内部インピーダンスが複素共役の関係の時にインピーダンス整合する．

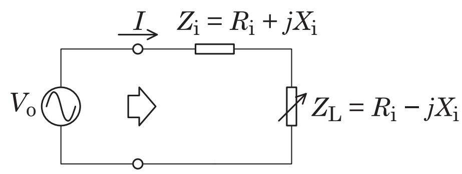


図 10.13 インピーダンス整合が成り立っているとき，電源の起電力成分から見た内部抵抗と負荷抵抗の合成インピーダンスは，純粋な抵抗成分だけの $2R_\mathrm{i}$ となり，力率が 100% となる．

ピーダンスを，それぞれ，

$$Z_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}X_\mathrm{i}, \tag{10.8}$$
$$Z_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} + \mathrm{j}X_\mathrm{L} \tag{10.9}$$

とする．このとき，負荷に最大電力 (最大の有効電力) が供給される条件，即ち，負荷での消費電力 (有効電力) が最大となる条件は，

負荷インピーダンスと内部インピーダンスが
複素共役の関係にある

ことである．式で書けば，以下の通りである．

$$Z_\mathrm{i} = Z_\mathrm{L}^*. \tag{10.10}$$

実部と虚部に分けて書けば，以下の通りである．

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} \quad \text{かつ} \quad X_\mathrm{i} = -X_\mathrm{L}. \tag{10.11}$$

即ち，電源の内部インピーダンスの虚部の符号が逆になった負荷を接続すればインピーダンス整合するのである．これに関する数学的な証明については，章末の付録に記した．

10.2.3 インピーダンス整合器 (マッチャー)

インピーダンス整合を満たそうとすると，電源の内部インピーダンス

$$Z_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}X_\mathrm{i} \tag{10.12}$$

に対して，負荷のインピーダンスが

$$Z_\mathrm{L} = R_\mathrm{i} - \mathrm{j}X_\mathrm{i} \tag{10.13}$$

になっていればよい．これは，電源内の純粋な起電力成分 V_o から見たときに，内部インピーダンスも含めた負荷が**図 10.13** に示すように，

$$Z_\mathrm{i} + Z_\mathrm{L} = 2R_\mathrm{i} \tag{10.14}$$

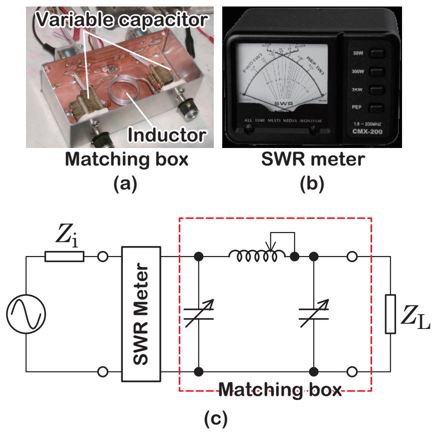


図 10.14 整合回路の例 [1,2].

となり，虚数部分が無くなるようにしていることに相当する．即ち，複素電力の章で学習した「力率」を 100% にしていること相当する．力率は，負荷に電力を供給したときに実際に消費される電力の割合を表す．それが 100% ではないという状態は，電力の一部が反射していることを意味する．従って，

インピーダンス整合とは，電力の反射が
無くなる状態

なのである．なお，この「**電力の反射**」の概念については，章末の補足説明に記したので，興味があれば見ておいて下さい．

10.2.4 インピーダンス整合器 (マッチングボックス)

負荷インピーダンスは，対象によって様々であるから，負荷のインピーダンスに合わせて電源の内部インピーダンスを調節する必要がある．通常は，電源内部にそうした内部インピーダンス調節機構を持たずに，電源

と負荷の間にそのような機能を持つ回路を設ける．そのような回路をインピーダンス整合器という (インピーダンス・マッチャー，マッチングボックスなどともいう).

アンテナに給電するときに電源とアンテナの間に入れるインピーダンス整合器の回路の例を**図 10.14** (a) に示す [1]．回路図では，**図 10.14** (c) の破線で囲まれた部分に相当し，π 型回路と呼ばれるものである．コイルのインダクタンスとコンデンサのキャパシタンスを調整し，負荷のインピーダンスも合わせたときの全体の虚数部分が極力小さくなるように調整する．

コイルとコンデンサを比較すると，コンデンサの方が可変機構を容易に導入できるため，一般にはコイルを半固定式にして，コンデンサに可変機構を持たせている．整合をとるときには，主としてコンデンサのキャパシタンスを可変する操作を行うことになるが，キャパシタンスを操作するつまみを回したときに，反射が増えたのか，減ったのかをモニターしなければ，どちら向きに回すと整合性が良くなったのかがわからない．そのため，入射電力と反射電力を計測する計測器を負荷と整合回路の間に設ける．この計測器を SWR メータといい，**図 10.14** (b) のようなものである [2]．SWR とは Standing Wave Ratio (定在波比) の略である．実際の作業としては，この SWR メータの反射電力/入射電力の比が最も小さくなるようにキャパシタンスのつまみを回して整合をとる．理論的な詳細については，電磁気学の電磁波の入射と反射，もしくは，分布定数回路の入射と反射などの項目で述べられているはずなので，興味のある人は見てみるとよい．

10.2.5 最大電力供給の定理の注意事項

最大電力供給の定理は，文字通り「最大電力供給」に関する定理であり，以下のことに注意しておく必要がある．即ち，

> **最大電力供給の定理は，負荷における電力消費の効率が最大となる条件を示したものではない．**

なお，ここでいう「負荷における電力消費の効率」とは，内部抵抗と負荷抵抗の両方を考慮した全体の消費電力の中に占める負荷抵抗での消費電力の割合のことである．負荷での消費電力が最大となる条件と，負荷での電力消費効率が最大となる条件は，一般には異なっている．従って，回路設計を行う人は，その回路の目的に応じて，どちらを優先するのかを判断することになる．

例えば，音声信号などをスピーカーに伝送する回路のような場合には，スピーカーでの消費電力を大きくすることを目的とする場合が多いので，最大電力供給の定理に従って，スピーカーでの電力消費が最大となる条件で設計する．但し，この場合にスピーカーに供給される電力は，電源から供給される全電力の半分にしかならず，残りの半分は電源の内部抵抗で消費されることになり，電力の利用効率は悪くなる．この詳細については，章末の豆知識を参照されたし．

一方，一般の家庭用の電気機器への給電の場合に，最大電力供給の定理に基づく負荷を接続するとエライことになるのである．そのため，家庭用機器の場合には，別の方針に基づく負荷抵抗値の設定がなされている．これについても，どんなエライことになるのか，エライことにならないようにどうしているのか，については，章末の豆知識を参照されたし．

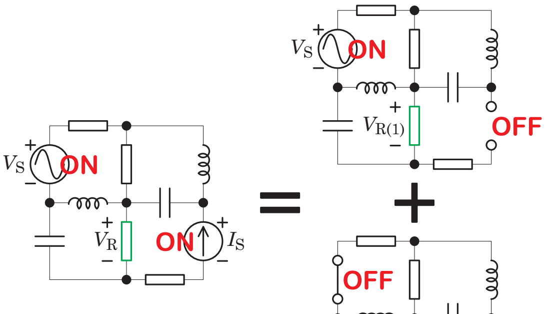
10.3 その他の定理

10.3.1 重ね合わせの理

重ね合わせの理とは，小難しく言えば，「ある物理現象がある原因で引き起こされるとき，その原因が複数あった場合に引き起こされる物理現象は，その原因が個別に引き起こす現象の和となる」，というものである．例えば，複数の荷電粒子がある場所に作る電場は，それぞれの荷電粒子が個別につくる電場の和 (この場合はベクトル和) となる，というのも重ね合わせの理の一つの例である．こうした理屈は，一見すると当たり前のように思えるが，常にまかり通るわけではなく，ある条件が必要なのだが，これについての詳細は，電気回路学の範疇を外れるので各自で調べて欲しい．

ここでは，電気回路学基礎で扱う方程式が全て重ね合わせの理を適用できる，ということを天下り的に信じてもらう．電気回路における「重ね合わせの理」とは，以下のような理屈である．

> 複数の電源が ON している線形回路において，ある回路素子の両端の電圧 (あるいはそこを流れる電流) は，各電源を個別に ON(ON したもの以外は OFF) したときにその素子に発生する電圧 (あるいはそこ



$V_R = V_{R(1)} + V_{R(2)}$

図 10.15 重ね合わせの理.

表 10.1 双対関係にあるパラメータと回路の例.

電圧	電流
インピーダンス	アドミタンス
直列	並列
短絡	開放

を流れる電流) の和となる.

なお，電源の **OFF** は電圧源と電流源では，回路の状態が異なることを思い出して欲しい．即ち，

- 電圧源の **OFF** は短絡,
- 電流源の **OFF** は開放

である.

10.3.2　回路の双対性

電気回路の理論では，**表 10.1** に示すような対をなすパラメータや回路があり，これらのパラメータが「双対性をなしている」と表現する．このとき，ある電気回路の法則が**表 10.1** の片方のパラメータで記述されているとき，もう片方のパラメータで記述してもその法則は成り立つ.

例えば，テブナンの定理は，双対性をなしているパラメータで書き換えれば，以下のようにノートンの定理になる.

テブナンの定理

線形二端子回路の**開放電圧**が V_o であり，内部**インピーダンス**が Z_i であるとき，その回路は，出力**電圧**が V_o の**電圧**源と**インピーダンス** Z_i の**直列**回路と等価である.

ノートンの定理

線形二端子回路の**短絡電流**が I_s であり，内部**アドミタンス**が Y_i であるとき，その回路は，出力**電流**が I_s の**電流**源と**アドミタンス** Y_i の**並列**回路と等価である.

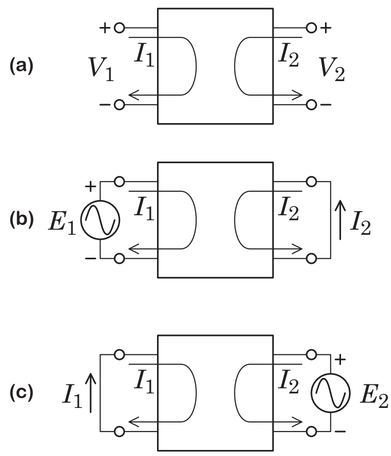


図 10.16 相反定理 (可逆定理).

10.3.3　相反定理 (可逆定理)

図 10.16 (a) に示すように，ある 4 端子回路があるとき，一方の端子に電圧源 $\boldsymbol{E}_1$ を接続し，他方の端子を短絡した時に，短絡した側に電流 $\boldsymbol{I}_2$ が流れるとする．逆に，先に短絡した側の端子に電圧源 $\boldsymbol{E}_2$ を接続し，他方の端子を短絡した時に，短絡した側に電流 $\boldsymbol{I}_1$ が流れるとする．このとき，以下の関係が成り立つ．これを**相反定理 (可逆定理)** という.

$$\frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{\boldsymbol{E}_2}{\boldsymbol{I}_1}. \tag{10.15}$$

この式の意味するとこは以下の通りである.

- どちら側を入力端子にしても，入力と出力の比が等しくなる.
- どちら向きにも信号を伝達できる.

このような相反定理の成り立つ回路のことを**相反回路**という．電気回路学基礎で取り扱う線形回路は，全て相反回路である．しかし，電子回路で扱うトランジスタやダイオードなどの非線形回路素子を含む回路は，相反回路

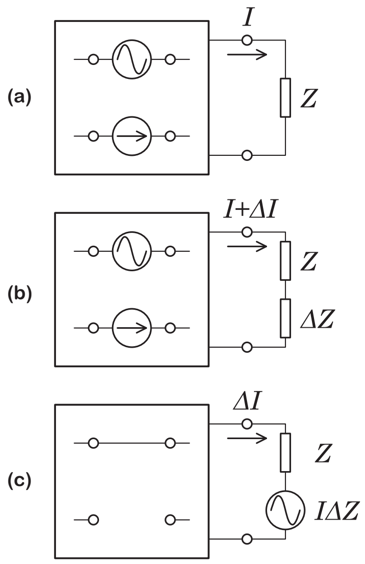


図 10.17 補償定理.

とはならない[*2].

10.3.4 補償定理

補償定理とは，以下のような定理である.

- 回路のある枝に電流 $\boldsymbol{I}$ が流れているとき,
- この枝に更にインピーダンス $\Delta\boldsymbol{Z}$ を追加したときの電流の変化 $\Delta\boldsymbol{I}$ は,
- 元の回路で電源を全て OFF し，$\Delta\boldsymbol{Z}$ と直列に $\boldsymbol{I}$ を妨げる向きに電圧源 $\boldsymbol{I}\Delta\boldsymbol{Z}$ を加えたときに流れる電流に等しい.

[*2] 非線形回路は，入力端子がどちら側であり，出力端子がどちら側であるか，が決まっている．線形回路はどっちを入力にしてもかまわない.

10.4 電源の直列・並列接続について

本章に到達したぐらいのところで，概ね電気回路の考え方がわかってきたのではないかと期待している．が，多くの場合，出題された問題を解くための手順を頭にコピーしただけの場合が多い．ここでは，新しい事を考えるときには，試験問題を解いて高い点数を取ることよりも，根本原理をきちっと理解していることの方が重要である，ということを示す．電気回路の理屈を支配している根本原理とは，以下の二つである．

- KCL（電流は勝手に無くなったりしない）
- KVL（電圧も勝手に無くなったりしない）

この二つを理解していれば，記憶力は不要である (はず) である．

電池を直列につなげれば，電圧がつなげた分だけ増える，ということは良く知っていると思う．これに対し，「では，電流はどうなるの？」ということに対してもきちっと理解している人は少ないと思われる．また，電池を並列につなげると，どうなるのか，ということを電気回路的にきちっと理解している人も少ないと思われる．

ここでは，その根本原理に基づいて，電池の直列・並列接続という極めて単純な回路の中に潜んでいる思わぬ落とし穴について述べる．この落とし穴は，電気回路の基礎を学んでいれば，落とし穴にはならないが，電気回路の上っ面だけしか知らないと，落とし穴にはまる．

10.4.1 電源とは

電気回路で「電源」と言った場合，多くの場合は「電圧源」である．実存する電圧源には内部抵抗 (あるいは内部インピーダンス) があり，純粋な起電力だけが存在するわけではない，ということを別の章で既に述べた．実存する電圧源を使うときには，この内部抵抗に加えて，**電流容量**というものを考慮する必要がある．即ち，以下のように電圧源を捉えなければならない．

- 電圧源は, ある電圧を出す電気回路である．しかし,
- ある最大の電流までしか電流を出力することはできない．その電源が出せる最大電流のことを電源の**電流容量**と言っている．例えば，電源の二つの端子間を短絡したとき (抵抗値がゼロの負荷をつないだとき)，理想電源ならば，無限大の電流が流れることになるが，そんな電源は実存しないのである．

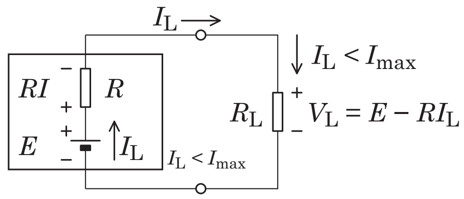


図 10.18 内部抵抗をもち，電流容量が J_{max} の直流電圧源に負荷抵抗 R_L を接続した回路.

ここで，**図 10.18** に示すように，内部抵抗 R_i をもち，電流容量が I_{max}，起電力が E の直流電圧源を考え，それが負荷抵抗 R_L に接続された回路を考えてみる．負荷に対してこの電源が 1 個だけ接続されている場合は，負荷に供給出来る電圧と電流は以下のような特性を持つことになる．

- **電圧**
  負荷に印加される電圧 V_L は，E とはならず，
  $$V_L = E - R_i I_L \tag{10.16}$$
  となる．これは，負荷を接続することによって電流 I_L が流れ，内部抵抗 R_i での電圧降下 $R_i I_L$ が発生するためである．
- **電流**
  負荷に供給出来る最大の電流は I_{max} である．

10.4.2 電源の直列接続

次に，**図 10.19** に示すような，電源の直列接続について考察する．二つの電源の起電力は E_1，E_2，内部抵抗は R_1，R_2，電流容量は I_{1max}，I_{2max} であるとする．このとき，負荷に印加できる電圧については，内部抵抗が増える分だけ電圧降下が大きくなるが，基本的には，

- 直列接続した電源全体の電圧は，それぞれの電源が直列接続のときと同じ負荷電流となる負荷に接続されたときの電圧の和となる．
  $$V_L = E_1 + E_2 - (R_1 + R_2) I_L. \tag{10.17}$$
  ここで，I_L はこの閉路を流れる電流である．例えば，特性が同じ二つの電源を直列接続すれば，その出力電圧は 2 倍になる．

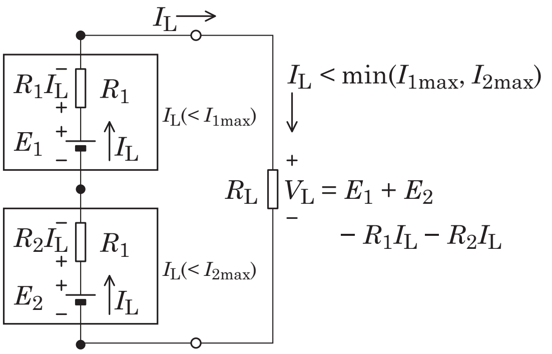


図 10.19 異なる性能の直流電圧源を直列に接続した場合.

次に電流に目を向けてみよう．負荷電流を式で表すと，

$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_L} \tag{10.18}$$

となる．従って，負荷抵抗値 R_L を小さくすれば，負荷電流 I_L が大きくなる．どこまで大きくなるのであろうか？電流容量が決まっている電源が一つだけの場合については，既に述べた．今回のように二つの電源が直列に接続されている場合はどうなるのであろうか？

このことを考える上でのキーポイントは，閉路全体を流れる電流が，どの場所も負荷電流 I_L と同じである，という点である．従って，I_L の値が，電源 1 または電源 2 の電流容量のどちらか小さい方の電流容量を超えた時点でアウトである[*3].

即ち，以下のことが言える.

- **異なる電流容量の電源を直列接続すると，電圧はそれぞれの電源の電圧の和となり増えることになるが，供給できる最大電流は電流容量が一番小さい電源の電流容量によって制限される.**

電気回路の基礎を学習しているにも関わらず，直列接続したら「電流容量も増える」などと勘違いしないように.

10.4.3 電源の並列接続 (同じ電圧の電源の場合)

2 本の電池を並列ではめ込む製品は結構あると思う．このとき，何を期待して 1 本ではなく，2 本にしている

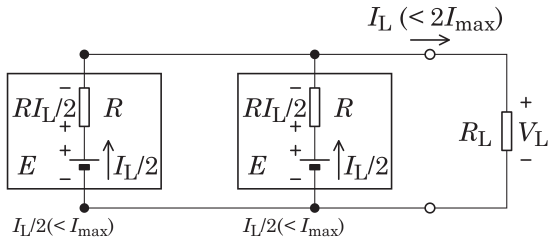


図 10.20 内部抵抗をもち，電流容量が I_{max} の直流電圧源を並列に接続した場合.

のであろうか？結論から先に言うと，

- 出力電圧は同じだが，
- 電流容量が倍になる

ということを期待している[*4]．**図 10.20** に示した回路を用いて具体的に考察してみよう.

二つの電源は全く同じ特性であり，起電力は E，内部抵抗は R，電流容量は I_{max} とする．このとき，負荷を流れる電流 I_L は，各電源を流れる $I_L/2$ の和となっている．従って，各電源は，$I_L/2$ なる電流値が I_{max} を超えるまで電流を出すことができる．従って，並列接続電源全体の電流容量は，$2I_{max}$ となる．一方，負荷の電圧 V_L は,

$$V_L = E - R\frac{I_L}{2} \tag{10.19}$$

となる．即ち，電源が一つだけの場合と比較して，起電力の成分は変わらないが，一つの電源に流れる電流が半分になるので，内部抵抗による電圧降下が半分になっている.

以上の結果をまとめると,

- **特性の揃った二つの電源を並列接続すると，おなじ出力電圧で[*5]，電流容量を 2 倍にすることができる,**

となる.

10.4.4 電源の並列接続 (異なる電圧の電源の場合)

前の節では，特性が揃った電源を並列接続した場合を考えたが，特性が揃っていない電源を並列接続するとどうなるであろうか．結論から先に言うと,

[*3] 電源が壊れるか，もしくは，電流リミッターが働いて電源が OFF になる.

[*4] これは，直列接続の場合と比較すると，「双対」の関係になっている.

[*5] 内部抵抗による電圧降下が一つだけの場合と比較して半分になるが，ほぼ同じと考えてこのように言っている.

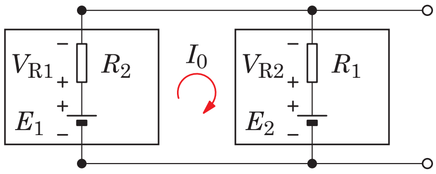


図 10.21 特性の異なる二つの直流電圧源を並列に接続した場合の無負荷状態 (負荷抵抗を接続しない状態) の回路図.

- 二つの電源の起電力が異なると，電源どうしで形成する閉路に電流が流れてしまう．即ち，負荷をつなげなくても，電力が消費されてしまう．電池の場合には，電池が消耗する.

となる.

図 10.21 に示した回路を用いて具体的に考察してみよう．無負荷の時の閉路電流を I_0 とすると,

$$E_1 - E_2 = R_1 I_0 + R_2 I_0 \tag{10.20}$$

となる．従って.

$$I_0 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \tag{10.21}$$

となる.

ここで，$E_1 = E_2$ の場合には，$I_0 = 0$ となり，無負荷時にはこの閉路に電流は流れない．即ち，電力の消費は無い．一方，$E_1 \neq E_2$ の場合には，$I_0 \neq 0$ となり，無負荷の場合でも，内部抵抗によって $(R_1 + R_2) I_0^2$ という電力が消費されてしまうのである.

電池の並列接続によって可動する道具の電池ボックスには，多くの場合,「必ず新品の電池をお使い下さい」と注意書きが書いてあるはずである．これは，並列接続する電池のうち，片方が少し消耗した (即ち，起電力が小さくなっている) 電池であると，上記の理屈により，負荷とは関係無いところで勝手に電池が消耗してしまい，電池を使える時間が短くなってしまうからである.

10.4.5 純粋な起電力の並列接続

前節では，電源を並列接続した例について説明したが，内部抵抗を持たず，起電力だけを持つ純粋な複数の電圧源が，それぞれの起電力が異なるにも関わらず並列につながるという状況は，物理的にあり得ないということも認識しておいて欲しい.

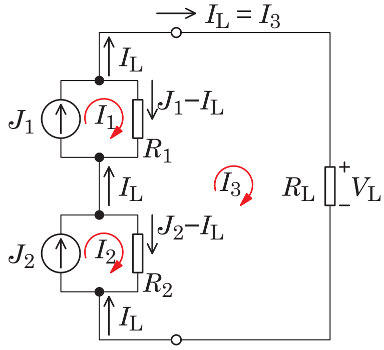


図 10.22 内部抵抗を有する特性の異なる二つの直流電流源を直列に接続した場合の回路図.

10.4.6 純粋な電流源の直列接続

異なる起電力 (だけ) を有する電圧源が並列に接続されるという状況は物理的にあり得ないことを前節で述べたが，電流に関しても同様の認識が必要である．即ち，異なる出力電流 (だけ) を有する電流源が直列に接続されるという状況も，物理的にはあり得ないのである.

10.4.7 純粋でない電流源の直列接続

異なる出力電流の純粋な電流源が直列接続される状況は，物理的にあり得ないということを前節で述べた．しかし，実在する電流源を導線でつなげれば，直列接続が出来てしまう．このとき，何が起こるのであろうか？大まかに言うと,

- 内部抵抗を有する電流源を直列に接続すると，各出力電流の平均値が流れる,

となる.「大まかにいうと」と書いたのは，正確に述べると，多少複雑な式に基づくことになるからである．以下では，それを説明する.

図 10.22 に示すように電流を割り振ると，閉路 1 と閉路 2 については，次式が成り立つ.

$$I_1 = J_1, \tag{10.22}$$
$$I_2 = J_2. \tag{10.23}$$

閉路 3 については，電圧源が無いので，I_3(I_Lと同じである) の向きに電流ががなれる方向を正の電圧降下の方向としたときに，全ての電圧降下の和がゼロとなる．即ち，次の閉路方程式が成り立つ.

$$0 = R_L I_3 + R_1 (I_3 - I_2) + R_2 (I_3 - I_2). \tag{10.24}$$

これを J_1，J_2，I_L を用いて書き換えれば，次式のようになる．

$$0 = R_L I_L + R_1(I_L - J_1) + R_2(I_L - J_2). \qquad (10.25)$$

これより，全体の電流 I_L は，

$$I_L = \frac{R_1 J_1 + R_2 J_2}{R_1 + R_2 + R_L} \qquad (10.26)$$

となる．

例えば，ここで，負荷を短絡 ($R_L = 0$) すると，

$$I_L = \frac{R_1 J_1 + R_2 J_2}{R_1 + R_2} \qquad (10.27)$$

となり，それぞれの電流源の出力電流を内部抵抗比を掛けて足したものになっている．大まかに言えば，平均値である．もう少し平均値であることがわかりやすくするには，出力電流は異なるが，内部抵抗値は同じ ($R = R_1 = R_2$)，という条件を適用してみるとよい．すると，次式が得られる．

$$I_L = \frac{J_1 + J_2}{2}. \qquad (10.28)$$

即ち，二つの電流源の出力電流の平均値が流れるのである．

10.4.8　電流源の直列接続例：太陽電池の直列接続

前節のような異なる出力電流の電流源が直列接続される具体的な例は，多少特異な例であるので，電気回路の教科書にはあまり紹介されていないようである．しかし，実際には，今日において大変重要なエネルギーデバイスにおいて，こうした接続形態は存在するのである．

電流源として機能する代表的なデバイスとして太陽電池がある．太陽電池は半導体の pn 接合への光照射によって電流が発生する電流源である．一方，その電圧は，光照射によって決まるのではなく，pn 接合を形成している半導体の物性 (拡散電位) によって決まる．即ち，光量を調節しても電圧を増減することはできない．従って，必要な電圧を得るためには，太陽電池を直列接続するのである．このときに，直列接続された二つの太陽電池に照射される光の量が異なっていれば，二つの太陽電池の電流が異なることとなる．即ち，出力電流の異なる電流源を直列接続したことになるのである．このような状況は，直列接続型の太陽電池の片方の太陽電池が影になってしまい，その電流量が減った，などという場合

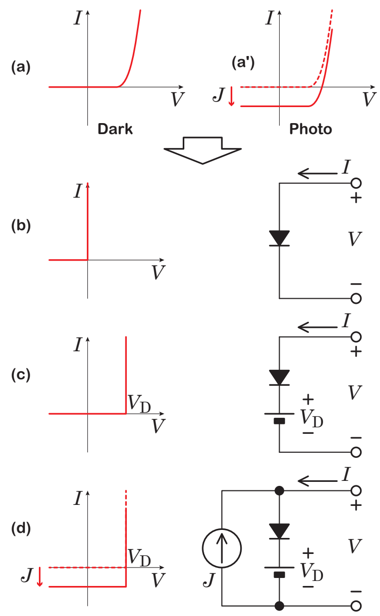


図 10.23 単純化したダイオードの特性．

に相当し，実際に起こりえることなのである．このようなときに，何が起こるのかを考察してみよう．

上記のことを考察するためには，前節で取り扱った内部抵抗を有する電流源という概念だけでは不足である．この電気回路学基礎では取り扱っていないダイオードという回路素子を扱うことになる．そこで，本論に入る前に，pn 接合なるものがどのような電流電圧特性であるのかを紹介しておく．ダイオードとは，片方にしか電流を流さないデバイスであり，一般には，半導体の pn 接合で構成されている．その電流電圧特性を図示すると，**図 10.23** (a) のようになる．これに光が照射されると，同図 (a') のように入射した光による電流 J が加わるのである[*6]．この詳細については「半導体工学」を参考にして欲しい．ここでは，これから述べることに必要な特性だけを抽出した極めて単純化されたダイオードの特性とその等価回路を用いて説明する．

ダイオードの重要な第一の特性は整流性である．即ち，逆向きの電流を流さない，という特性である．従って，同図 (b) のようになる．回路図におけるダイオードは同図 (b) の右側のように表される．しかし，同図 (a) に示すように，実際のダイオードは，先述の「拡散電位」ぐらいの電圧が印加されたときに電流が流れ始める，と

[*6] 加わる電流の向きが逆であることに注意すべし．

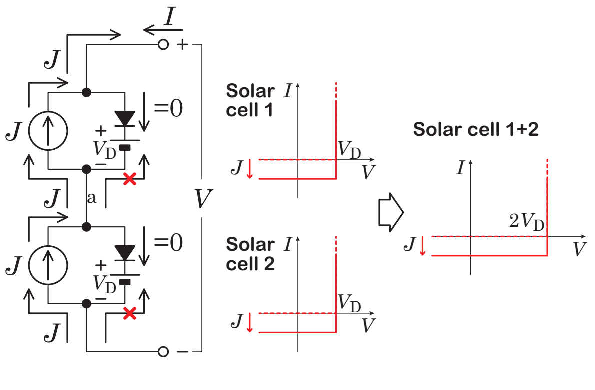


図 **10.24** 特性の揃った太陽電池の直列接続の等価回路.

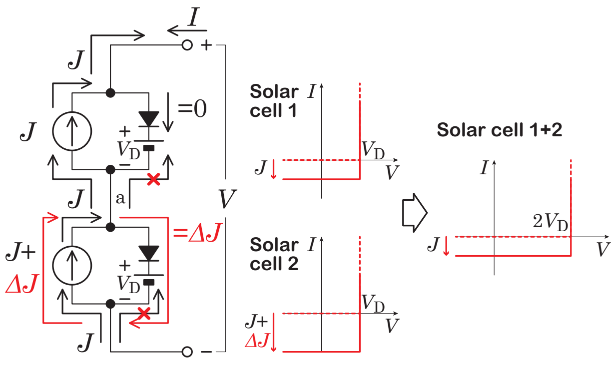


図 **10.25** 特性の揃っていない太陽電池の直列接続の等価回路.

いう特徴を有する．この特徴を簡略版に反映させようとすると，同図 (c) のようになり，等価回路は (かなり無理矢理であるが) 同図 (c) の右側のような回路となる．これに光が照射されたときの状態は，同図 (d) のように照射される光量 (フォトンフラックス) に比例した J が追加されることになる．等価回路的には，J なる電流源が並列につながることになる．これを太陽電池の等価回路として，それが二つ直列接続したときの状況を考察してみよう．

10.4.9 特性の揃った太陽電池の直列接続

まず，**図 10.24** に示すように，特性が揃った太陽電池が直列接続された状態を考えてみよう．この状態を考えるときに必要な知識は，以下の **2** 点である．

- **[電流連続の原則]**
  分岐が無い限り同じ，同じ導線を流れる電流は，場所が変わっても全て同じである．
- **[ダイオードの基本特性]**
  ダイオードには逆向けの電流が流れない．

以上の二つの知識を用いて，回路に流れる電流の挙動を考えてみよう．

下側の太陽電池の電流源の電流，即ち，光照射による電流成分 J に注目すると，この電流は二つの太陽電池の接続点である節点 a に流れ込むことになる．結論から先に言うと，この電流は，上側の太陽電池の電流源の電流と電流連続の原則を満たすように流れる[*7]．この電流の可能性のあるその他の行き先としては，下側の太陽電池のダイオードの経路，上側の太陽電池のダイオードの経路，の二通りが考えられるが，以下の理由により，そちらには流れない．

- 下側の太陽電池のダイオードの経路
  ダイオードに電流が流れるだけの電位差 (=V_D) がダイオードにかかっていないので流れない
- 上側の太陽電池のダイオードの経路
  そもそもダイオードにとっての逆方向なので流れない

従って，特性の揃った二つの太陽電池を直列接続した場合には，以下のようになる．

- **電圧**
  二つの太陽電池が出せる電圧 V_D の和となる．
- **電流**
  二つの太陽電池が出せる電流の和とはならず，一つの太陽電池が出せる電流にしかならない．

10.4.10 特性の揃っていない太陽電池の直列接続

次に，**図 10.25** に示すように，特性が揃っていない二つの太陽電池を直列接続した場合について考察してみよう．具体的には，下側の太陽電池の出力電流が増えた場合であり，下側だけ日光が良く当たったらどうなるか，直列接続された太陽電池から出力される電流は増えるのか？という問題である．結論から先に言うと，「増えない」である．これを示そう．

下側の太陽電池の電流源の増加した電流分を ΔJ とする．このとき，上側の太陽電池に行く経路については，

[*7] 流れるというよりは「つながる」と言った方が適切かもしれない．

ダイオードに対して逆向きなので，ダイオードのある経路に流れ込むことはない．また，節点 a における**電流連続の原則**により，上側の太陽電池の電流源の電流につながることもできない．上側に行けない ΔJ の成分が行ける唯一の経路は，下側のダイオードのある経路である．この場合，電流の向きはダイオードを通過できる向きであるから，この経路を通過できる．従って，下側の太陽電池の出力電流が増えたとしても，その増分は下側の太陽電池の等価回路の閉路を回るだけで，直列接続太陽電池の外には出てこないのである．

即ち，特性の揃っていない二つの太陽電池を直列接続した場合には，以下のようになる．

- **電圧**
  二つの太陽電池が出せる電圧 V_D の和となる．
- **電流**
  どちらか片方の出力電流が増えても，その増分は直列接続太陽電池全体の端子からは出てこない．即ち，直列接続太陽電池の電流出力は「増えない」のである．

従って，直列接続した太陽電池の電流が増加するためには，**図 10.26** に示すように，光による電流源の出力電流が同じでなければならない，即ち，両方の太陽電池に対する光照射量が同じでなければならないのである．広い敷地で複数の太陽電池を接続して大面積で発電する場合，どの場所も同じ光照射量にするなどということは，現実的には無理である．従って，電気＆電子回路的にこれらの問題を解決するための策が取られている．興味のある人は，どのような対策が取られているのかを自ら調べてみるとよいと思う．また，本章では取り上げなかったが，太陽電池を並列接続すれば電流容量を増やすことができるが，この場合にも様々な問題があり，実際の太陽電池には，その問題に対する解決策が講じられているので調べてみるとよい．

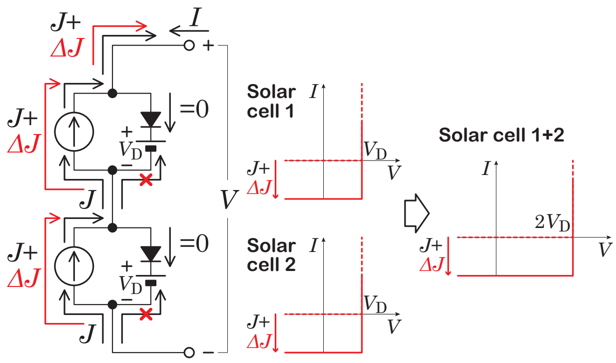


図 10.26 直列接続された太陽電池の両方の光照射量が同様に増えたときの等価回路の様子と電流電圧特性．

豆知識

豆知識

固有電力 (有能電力)

図 10.27 に示すように，内部インピーダンスが $Z_{\mathrm{i}} = R_{\mathrm{i}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{i}}$ の電源に，インピーダンス整合した負荷 $Z_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}} - \mathrm{j}X_{\mathrm{i}}$ が接続されているときに得られる最大供給電力を，**固有電力**，または**有能電力**という．固有電力 $P_{\max}$ は，

$$P_{\max} = R_{\mathrm{i}}|I|^2 = R_{\mathrm{i}}\frac{|V_{\mathrm{o}}|^2}{|Z_{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{L}}|^2} \tag{10.29}$$

$$= \frac{|V_{\mathrm{o}}|^2}{4R_{\mathrm{i}}} \tag{10.30}$$

で与えられる．

なお，この固有電力に対して，電源内部の純粋な起電力成分が出力している電力 P_{o} は，

$$P_{\mathrm{o}} = 2P_{\max} \tag{10.31}$$

となり，純粋起電力から出力された電力のうち，半分が内部インピーダンスで消費され，もう半分が負荷で消費されているとみることができる．

豆知識

反射係数とインピーダンス整合

負荷での消費電力は，本来は負荷のインピーダンスによって異なるものである．しかし，見方を変えると，電源から固有電力に相当する電力が供給されているが，負荷との整合がとれていないので，その一部が反射されてしまっているために負荷によって異なる，という見方もできる．ここでは，このような「**電力の反射**」に関する概念を少し説明する．

かなり天下り的になるが，インピーダンス負荷に電力を供給したときの反射係数は，次式で与えられる．

$$\rho\prime = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_{\mathrm{i}}^*}{Z_{\mathrm{L}} + Z_{\mathrm{i}}}. \tag{10.32}$$

反射係数がゼロ，即ち $\rho\prime = 0$，即ち $Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{i}}^*$ のとき，電源と負荷のインピーダンスが整合していることになる．

$P_{\max}$ の電力が負荷に対して入射されたときに，反射

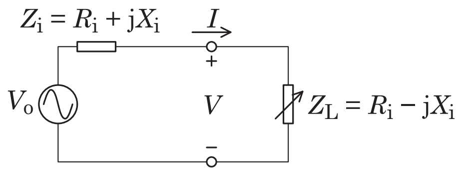


図 10.27 インピーダンス整合した負荷が接続された回路．

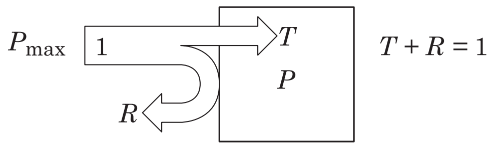


図 10.28 電力の透過と反射の概念．

がある場合には，実際に負荷で消費される電力は，

$$P = (\text{電力の透過係数 } T) \times P_{\max} \tag{10.33}$$

$$= (1 - \text{電力の反射係数 } R) \times P_{\max} \tag{10.34}$$

となる．概念的には，**図 10.28** に示すようになる．ここで，反射係数は，

$$R = |\text{ 振幅反射係数}\rho\prime|^2 \tag{10.35}$$

で与えられる．

$T = 1 - R$ が $P_{\max}$ に対して実際に負荷で消費される電力の比率となることを確認してみよう．

$$1 - |\rho\prime|^2 = 1 - \rho\prime\rho\prime^* \tag{10.36}$$

$$= 1 - \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_{\mathrm{i}}^*}{Z_{\mathrm{L}} - Z_{\mathrm{i}}}\frac{Z_{\mathrm{L}}^* + Z_{\mathrm{i}}}{Z_{\mathrm{L}}^* + Z_{\mathrm{i}}^*} \tag{10.37}$$

$$= \frac{(Z_{\mathrm{L}} + Z_{\mathrm{L}}^*)(Z_{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{i}}^*)}{(Z_{\mathrm{L}} + Z_{\mathrm{i}})(Z_{\mathrm{L}}^* + Z_{\mathrm{i}}^*)} \tag{10.38}$$

$$= \frac{P}{P_{\max}} \tag{10.39}$$

となり，確かに入射した電力 $P_{\max}$ と実際に消費される電力 P の比率になっていることがわかる．

豆知識

最大電力供給の定理は万能ではない

最大電力供給の定理は，電気回路学の中でも重要な定理であり，私も，「電気回路学を学んだ」というのであれば最低限知っておいて欲しい知識であると思って講義をしている．しかし，多くの定理がそうであるように，**こ**

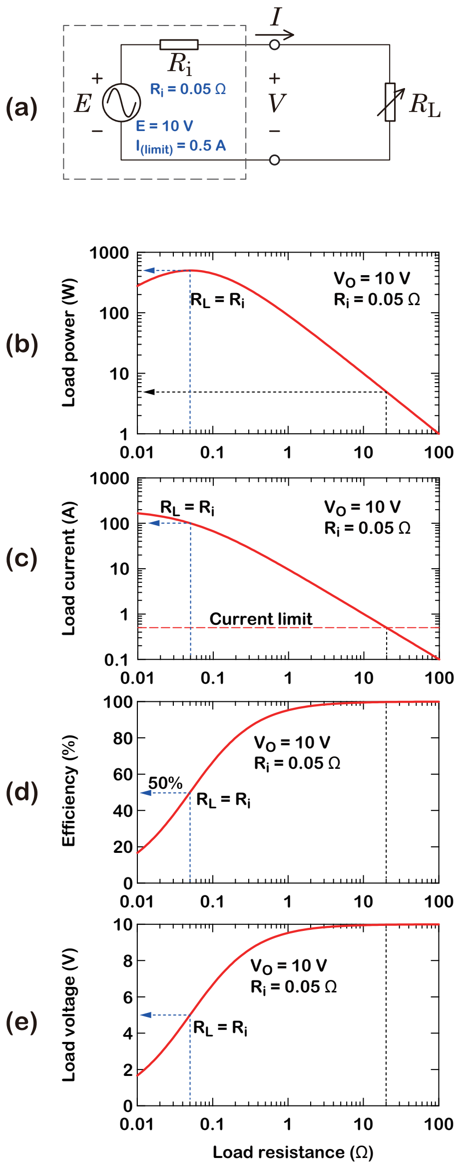


図 10.29 現実の電源における最大電力供給定理の適用．(a) 電流容量が明示された電圧源を含む回路の図．(b) この回路の負荷における消費電力の負荷抵抗依存性．(c) この回路の負荷電流の負荷抵抗依存性．(d) この回路の電力効率の負荷抵抗依存性．(e) この回路の端子間電圧の負荷抵抗依存性．

の定理はある仮定の上に成り立っている，ということを忘れてはならない．また，**最大供給電力となることが，常に一番良いこととなるわけではない**，ということも忘れてはならない．

そのようなことを頭に入れておいて頂くために，以下では次の点について述べる．

- **電圧源 E は理想電源である．**
  （ある仮定の上に成り立っている）
- **電力最大のときに効率最大でなない．**
  （常に一番よいこととなるわけではない）
- **電力最大のときには電圧が半分になる．**
  （常に一番よいこととなるわけではない）

電圧源は理想電源である

「電圧源が理想電源である」とは，こちらが指定した電圧を印加でき，かつ，いくらでも電流を流すことができる電源のことである．電源として理想電源を想定した最大電力供給の定理においては，現実の電源が有する「流せる電流に上限がある」という「電流容量」は無視されている．従って，現実の電源を用いた場合には，電力の上限が電流容量によって制限され，必ずしも最大電力供給の定理から導き出される最大電力を供給できるとは限らない．即ち，最大電力供給の定理に従って最大電力を供給する負荷抵抗を接続しようとしても，そのときに流れる電流が電源の電流容量を超える場合には，実際には実現不可能となる．もしも，そのような負荷抵抗を接続したとすると，電源の許容範囲を越える電流が電源に流れるため，電源の内部抵抗成分に相当する箇所での過剰な電力消費によって発熱し，電源が損傷するか，もしくは電源の保護回路が働いて電源が OFF になる．

例えば，**図 10.29**(a) に示すような回路を想定してみよう．電源の起電力は $E = 10$ V，内部抵抗は $R_i = 0.05$ Ω，電流容量は $I_{(limit)} = 0.5$ A とした．このとき，単純に最大電力供給定理を適用すると，$R_i = R_L = 0.05$ Ω のときに最大電力が供給される．**図 10.29**(b) は，このことを示すためにプロットした負荷電力の負荷抵抗依存性であり，$R_L = R_i$ で最大値（計算すると 500 W）となっている．

このときの負荷電流 $I_{maxP(ideal)}$ は，

$$I_{maxP(ideal)} = \frac{E}{2R_i} = \frac{10}{2 \times 0.05} = 100 \text{ A}$$

となり，これと同じ電流が電源にも流れる．電源の電流容量が 0.5 A であるから，100 A という電流は大幅に許容範囲を超えている[*8]．即ち，**図 10.29**(a) の回路におい

[*8] 電気回路に関する経験が豊富になってくると，どれくらいの電流が普通であり，どれくらいまで大きくなると過大なのか，という認識を持つようになる．もちろん，同じ電流値であっても，

て最大電力供給定理で与えられる最大電力を供給することは実際には不可能なのである．

図 10.29(c) の赤実線は電流 I の負荷抵抗依存性をプロットしたものであり，赤破線は電源の電流容量である．**図 10.29**(b) と**図 10.29**(c) から，電源の電流容量の範囲内で電力を供給できるのは，赤実線の I が赤破線の電流容量を越えない負荷抵抗に限定され，その抵抗は最大電力供給の条件を満たす抵抗よりもずっと大きいことがわかる．この制限内で最大の電力が得られるのは，その制限内における最小の負荷抵抗を接続したときとなる．同図から，そのような負荷抵抗の値がおおよそ 20 Ω であることが読み取れる．これを計算によって求めると，以下のようになる．

$$R_{\mathrm{L(limit)}} = \frac{E}{I_{\mathrm{(limit)}}} - R_{\mathrm{i}} = \frac{10}{0.5} - 0.05 \\ = 19.95 \approx 20\ \Omega$$

となる．また，このときの負荷での消費電力 $P_{\mathrm{L(limit)}}$ は，

$$P_{\mathrm{L(limit)}} = R_{\mathrm{L(limit)}}\, I_{\mathrm{(limit)}}^2 = 4.988 \approx 5.0\ \mathrm{W}$$

となる．この電力の値は，最大電力供給の条件を満たすときの電力の値と比較すると極めて小さい．しかし，必要とする電力がこの程度で十分である場合には、無理に最大電力供給の条件を満たす必要がないことは理解できるであろう．そのような場合には，むしろ別の要件を満たすことを優先した方がよくなる．その別の要件というのが，次に述べる「効率」や「端子間電圧の維持」である．電源の端子が家庭用のコンセントであり，負荷抵抗に相当するものがコンセントに差し込んで使う電気機器である場合には，最大電力供給の条件については頓着せず，次節で述べるように「別の要件」が優先される．

電力最大のときに効率最大でなない

もしも，**図 10.29**(a) の電流容量が十分に大きいとすると，負荷抵抗の値を最大電力供給の定理を満たす値まで小さくすることが可能となる．しかし，この場合においても，留意しておくべきことがある．それが効率と端子間電圧（この場合は負荷電圧と同じ）である．本節では，まず効率について述べる．

ここでいう効率とは，電源 E から供給される全電力の中に占める負荷の電力の比率である．

$$\eta = \frac{\text{負荷の電力}}{\text{供給される全電力}} \times 100 = \frac{R_{\mathrm{L}} I^2}{(R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}}) I^2} \times 100 \\ = \frac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}}} \times 100\ \%$$

と表される．

図 10.29(d) は，この効率の負荷抵抗依存性をプロットしたものである．この図や上式から容易にわかると思うが，最大電力供給の定理を満たす負荷抵抗，即ち，$R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ なる負荷抵抗を接続した場合には，効率は 50% となる．即ち，最大電力供給の定理を満たす場合，電源から供給される全電力のうち，半分は電源の内部抵抗で消費され，無駄な電力を消費することになる．ここでいう「無駄な電力」は，電源の内部抵抗成分の加熱などに使われることになる．この加熱が過大になると発火などが起こる可能性がある．また，そのような事態に至らない場合であっても，無駄な電力が電源側で消費されることに変わりはない．従って，効率を優先する場合には，最大電力供給の定理は適用されないのである．

電力最大のときには電圧が半分になる

次に，もう一つの留意点である端子間電圧について述べる．電源に内部抵抗があると，

$$V = E - R_{\mathrm{i}} I \tag{10.40}$$

より，電源内部において $R_{\mathrm{i}} I$ なる電圧降下が生じ，**図 10.29**(e) に示すように，端子間の電圧 V が E よりも小さくなる．この端子間電圧の減少が顕著になり，接続した負荷（電気機器など）を稼働させるために必要な電圧を下回ると，その機器はもはや機能しなくなる．そのようなことが起こらないように，電源の内部抵抗 R_{i} の大きさや，電流 I の大きさを決める負荷抵抗 R_{L} の大きさは，E に対して $R_{\mathrm{i}} I$ が無視出来るほど小さくなるように設定される．また，端子間電圧の減少が無視できるほど小さい場合の電力効率は，**図 10.29**(d) に示すように，ほぼ 100% となり，無駄な電力が電源側で消費されることもなくなる．一般に，全ての家庭用の機器類の負荷抵抗の値は端子間電圧が大きく変動しない程度となるように設計されている．これは，普段の生活において，コンセ

それが「普通」と認識されるか「過大」と認識されるかは，分野によって異なる．上記の，100 A という電流値は，「弱電」と呼ばれる電子機器の分野では，一般には極めて大きい電流と認識される．即ち，「電源容量の 0.5 A より大きい」ということよりも以前に，そもそも「えらくデカイ電流だな」，という認識をもつことになる．

ントに何かを差し込んだときに，電圧が下がるなどという不具合が生じていないことからもわかるであろう．

ではどんなときに最大電力供給の定理を使うのか？

以上の説明を聞くと，「最大電力供給の定理」は，効率を度外視した無意味な定理に思えてくるかもしれないが，そうではない．内部抵抗での無駄な消費電力が大きくても，負荷での電力の大きさが是が非でも大きくなければならない，という要件があれば，最大電力供給定理に従って負荷抵抗の値を決定することになる．

例えば，スピーカーへの電力伝送のような場合には，スピーカーの音量が大きいことが他のなによりも重要となる場合がある．そのような場合には，効率が悪くても，電力が大きい方を優先して内部抵抗や負荷抵抗の値が選定される．但し，扱う電力の大きさが極めて大きい場合には，電力を供給する側の内部抵抗成分の発熱によって，電力供給側の損傷や事故などが起こる危険性があることに留意しておく必要がある．無理にでも最大電力を実現した方が目的を達成できるという場合には，例えば，発熱量を事前に計算し，発火や損傷などが起こらぬように冷却装置をつける，などの措置を講じておく必要がある．

なお，電源の内部抵抗と負荷抵抗の関係が最大電力供給の定理を満たす場合には，先述の通り，負荷に印加される電圧 V が E の半分になるが，上記のスピーカーのような場合には，そうなることを前提にして設計する．

以上のように，最大電力供給の定理というのは，「何にもまして最大電力を!」という目的のときは役に立つのだが，目的がそれ以外のときには，「いやいや，そうじゃなくて，他のことに気を配りなさい」となるので注意されたし．

課題

テブナンの定理

テブナンの定理を証明せよ

略解

図 10.30 の□で囲まれた回路について考える．簡単のために，この□で囲まれた回路が，以下の二つの電圧源と二つの電流源を持つ，と仮定する．

$$V_{\rm S1},\, V_{\rm S2}, \quad I_{\rm S1},\, I_{\rm S2}. \tag{10.41}$$

端子 ab 間の電圧は，重ね合わせの理によると，各電源が個別に動作したときの ab 間の電圧の和である．従って，以下のように表すことができるはずである．

$$V = A_0 I + A_1 V_{\rm S1} + A_2 V_{\rm S2} + A_3 I_{\rm S1} + A_4 I_{\rm S2}. \tag{10.42}$$

ここで，A_i は□内の回路素子によって決まる定数である．これを少し書き直すと，

$$V = A_0 I + B_0, \tag{10.43}$$
$$B_0 = A_1 V_{\rm S1} + A_2 V_{\rm S2} + A_3 I_{\rm S1} + A_4 I_{\rm S2}. \tag{10.44}$$

ここで，端子 ab が開放になったときを考えてみる．開放であれば，$I = 0$ であるから，$V = B_0$ となる．これを以下のように書いておく．

$$V_{\rm o} = B_0. \tag{10.45}$$

次に，$I \neq 0$ で内部の電源を全て **OFF** にするとどうなるであろうか．

$$V_{\rm S1} = V_{\rm S2} = I_{\rm S1} = I_{\rm S2} = 0 \tag{10.46}$$

であるから，$B_0 = 0$ となり，次式が成り立つ．

$$V = A_0 I. \tag{10.47}$$

これを以下のように書いてみよう．

$$V = Z_{\rm i} I. \tag{10.48}$$

すると，もともとの $V = A_0 I + B_0$ なる式は，先ほど決めた $V_{\rm o}$ と $Z_{\rm i}$ を用いると，以下のように書けることになる．

$$V = Z_{\rm i} I + V_{\rm o}. \tag{10.49}$$

この式の意味するところを回路図にすると，**図 10.31** のようになる．即ち，**図 10.30** の回路は，**図 10.31** と等価である，ということになる．

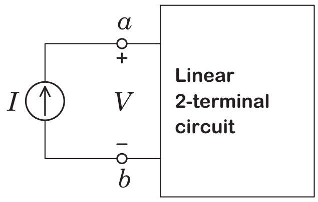


図 10.30 テブナンの定理を考えるための回路.

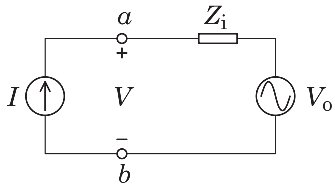


図 10.31 テブナンの定理の証明によって得られた式が意味する回路.

課題

ノートンの定理

ノートンの定理を証明せよ

略解

ノートンの定理の場合も，その証明方法は，テブナンの定理の場合とほぼ同様である．**図 10.32** の□で囲まれた回路について考える．この□で囲まれた回路が，以下の二つの電圧源と二つの電流源を持つ，と仮定する．

$$V_{\rm S1},\, V_{\rm S2}, \quad I_{\rm S1},\, I_{\rm S2}. \tag{10.50}$$

重ね合わせの理により，端子 a に流れ込む電流は，各電源が個別に動作したときに流れ込む電流の和である．従って，以下のように表すことができるはずである．

$$I = C_0 V + C_1 V_{\rm S1} + C_2 V_{\rm S2} + C_3 I_{\rm S1} + C_4 I_{\rm S2}. \tag{10.51}$$

ここで，C_i は□内の回路素子によって決まる定数であるこれを少し書き直すと，

$$I = C_0 V + D_0, \tag{10.52}$$
$$D_0 = C_1 V_{\rm S1} + C_2 V_{\rm S2} + C_3 I_{\rm S1} + C_4 I_{\rm S2}. \tag{10.53}$$

ここで，端子 ab が短絡になったときを考えてみる．短絡であれば，$V = 0$ であるから，$I = D_0$ となる．これを以下のように書いておく．

$$I_{\rm s} = D_0. \tag{10.54}$$

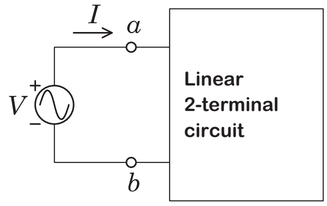


図 10.32 ノートンの定理を考えるための回路.

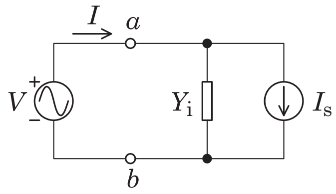


図 10.33 ノートンの定理の証明によって得られた式が意味する回路.

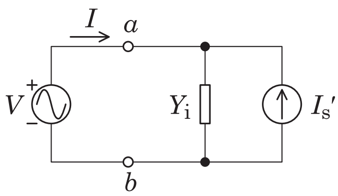


図 10.34 ノートンの定理の証明によって得られた式が意味する回路にて電流の向きを「普通の」向きにした場合の図.

次に，$V \neq 0$ で内部の電源を全て OFF にするとどうなるであろうか.

$$V_{\mathrm{S1}} = V_{\mathrm{S2}} = I_{\mathrm{S1}} = I_{\mathrm{S2}} = 0 \tag{10.55}$$

であるから，$D_0 = 0$ となり，次式が成り立つ.

$$I = C_0 V. \tag{10.56}$$

これを以下のように書いてみよう.

$$I = Y_{\mathrm{i}} V. \tag{10.57}$$

すると，もともとの $I = C_0 V + D_0$ なる式は，先ほど決めた I_{s} と Y_{i} を用いると，以下のように書けることになる.

$$I = Y_{\mathrm{i}} V + I_{\mathrm{s}}. \tag{10.58}$$

この式の意味するところを回路図にすると，**図 10.33** のようになる．電流源の向きが当初のノートンの定理の紹介で示した図と逆であるが，$I_{\mathrm{s}} = D_0$ の代わりに，$I_{\mathrm{s}'} = -D_0$ とすれば，**図 10.34** のようにすることができる.

課題

整合 (抵抗の場合)

抵抗のみの場合の供給電力最大の法則を証明せよ

略解

図 10.11 における電力を R_{L}, R_{i}, V_{o} を用いて書くと，以下のようになる.

$$P = R_{\mathrm{L}} I^2 = R_{\mathrm{L}} \left(\frac{V_{\mathrm{o}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}}} \right)^2. \tag{10.59}$$

P の R_{L} 依存性をプロットすると，**図 10.11** (b) のようになり，ある R_{L} で P が最大値を持つ．そのとき，$R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ である，というのがこの法則である.

P が最大値をとるのは，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}R_{\mathrm{L}} = 0$ の時であるから，そのときに $R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ となっていることを示せばよい．P の R_{L} による微分を行えば，次式が得られる.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_{\mathrm{L}}} = V_{\mathrm{o}}^2 \frac{R_{\mathrm{i}} - R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}})^3}. \tag{10.60}$$

この式より，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}R_{\mathrm{L}} = 0$ となるのが，$R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ の時であることがわかる.

課題

整合 (インピーダンスの場合)

一般のインピーダンスの場合の供給電力最大の法則を証明せよ

略解

負荷が複素インピーダンスの場合，有効電力を表す式は,

$$P = R_{\mathrm{L}} |I|^2 \tag{10.61}$$

$$= R_{\mathrm{L}} \frac{|V_{\mathrm{o}}|^2}{|Z_{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{L}}|^2} \tag{10.62}$$

$$= R_{\mathrm{L}} \frac{|V_{\mathrm{o}}|^2}{(R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{i}} + X_{\mathrm{L}})^2} \tag{10.63}$$

となる．負荷が抵抗だけの場合には，R_{L} に関する微分が最大になる条件だけを見出せばよかったが，負荷が複

素インピーダンスの場合には，X_L に関する微分が最大になるという条件も加わる．

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0, \text{　かつ　} \frac{\partial P}{\partial X_L} = 0. \tag{10.64}$$

この二つの条件を満たす R_L と X_L を求めると，

$$R_L = R_i, \text{　かつ　} X_L = -X_i \tag{10.65}$$

となる，というのがこの法則の証明の流れである．

まず，式 (10.63) を X_L で微分すると，

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = -2|V_o|^2 \left\{ \frac{R_L(X_i + X_L)}{\left[(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2\right]^2} \right\} \tag{10.66}$$

となる．これより，$\partial P/\partial X_L = 0$ となる X_L の条件は，式 (10.66) から

$$X_L + X_i = 0 \tag{10.67}$$

となることである，ということがわかる．また，こうなる条件は，R_L によらず，X_i と X_L の関係だけで決まっている，ということもわかる[*9]．従って，P を最大にするための必要条件の一つは，

$$X_L = -X_i \tag{10.68}$$

であり，あとは，この条件下で，P が最大になる R_L を見出せばよい．

そこでまず，式 (10.63) において，$X_L = -X_i$ としておくことにする．すると，式 (10.63) は以下のようになる．

$$P = R_L \frac{|V_o|^2}{(R_i + R_L)^2}. \tag{10.69}$$

この式は，負荷が抵抗 R_L だけの場合の電力の式と同じである．従って，$\partial P/\partial R_L = 0$ となる条件は，

$$R_L = R_i \tag{10.70}$$

ということがわかる．

以上より，一般的な複素インピーダンスを内部インピーダンス，負荷インピーダンスとした場合には，供給電力最大の条件を満たすための条件は，以下の通りとなる．

$$R_L = R_i, \text{　かつ　} X_L = -X_i. \tag{10.71}$$

この式の意味するところは，

$$Z_L = Z_i^* \tag{10.72}$$

である．即ち，負荷インピーダンスと電源の内部インピーダンスが複素共役の関係であれば，最大電力供給の条件が満たされる．言い換えれば，これが満たされるときに，インピーダンス整合がなされる，と言うことができる．

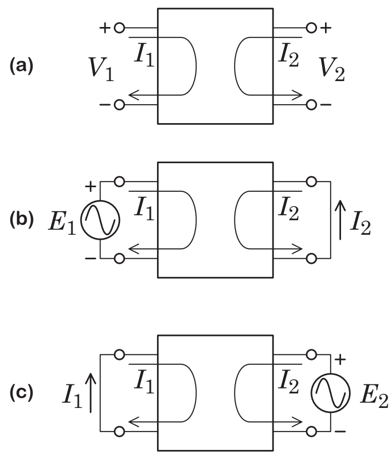


図 10.35 相反定理 (可逆定理) の課題用の図．

課題

相反定理

図 10.35 (a) において，左側と右側の電流と電圧の関係を表すと，一般的には，

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2, \tag{10.73}$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \tag{10.74}$$

と書ける．このとき，

$$y_{12} = y_{21} \tag{10.75}$$

が成り立っているときに，この回路が相反性を有することを証明せよ．

略解

図 10.35 (b) のように，$V_1 = E_1$，$V_2 = 0$ とすると，

$$I_2 = y_{21}E_1 \tag{10.76}$$

となる．一方，**図 10.35** (c) のように，] $V_1 = 0$，$V_2 = E_2$ とすると，

$$I_1 = y_{12}E_2 \tag{10.77}$$

となる．これより，$y_{12} = y_{21}$ であれば，

$$\frac{E_1}{I_2} = \frac{E_2}{I_1} \tag{10.78}$$

[*9] $R_L = 0$ でも $\partial P/\partial X_L = 0$ となるが，そのときは，そもそも有効電力が無いのであるから，$P = 0$ となってしまい，最大もくそもない．

となる.

事前基盤知識確認事項

[1] 微分によって極値を求める (その 1)

次式で示される関数 P は，$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{i}$ のときに極大となることを示せ．V_o，R_i は定数とする．

$$P(R_\mathrm{L}) = R_\mathrm{L} \left(\frac{V_\mathrm{o}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \right)^2 .$$

略解

課題 整合 (抵抗の場合) を参照されたし．

[2] 微分によって極値を求める (その 2)

次式で示される二変数の関数 P は，$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{i}$ かつ $X_\mathrm{L} = -X_\mathrm{i}$ のときに極大となることを示せ．V_o，R_i，X_i は定数とする．

$$P(R_\mathrm{L}, X_\mathrm{L}) = R_\mathrm{L} \left(\frac{|V_\mathrm{o}|^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 + (X_\mathrm{i} + X_\mathrm{L})^2} \right).$$

略解

課題 整合 (インピーダンスの場合) を参照されたし．

事後学習内容確認事項

A. テブナンの定理（テブナン等価回路）

1. テブナン等価回路

図 10.36 の回路のテブナン等価回路を求めよ.

2. 最大電力

最大電力を供給するための R_L を求め，その最大電力を求めよ.

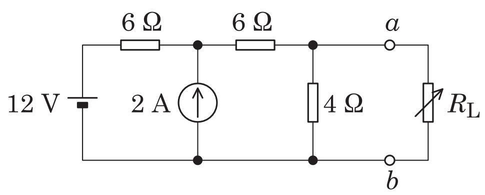


図 10.36 テブナン等価回路問題の図.

略解

1. テブナン等価回路

1.1 R_i を求める.

まず，テブナンの等価回路における内部インピーダンス (この場合は，抵抗成分のみであるので内部抵抗) R_i を求める．この R_i は，負荷が接続されている端子 ab の電源側 (左側) の全ての電源を OFF にした場合に，端子 ab から電源側 (左側) を見たときの抵抗である.

電圧源の OFF とは，電圧源を短絡 (ショート) にすることであり，電流源の OFF とは，電流源を開放 (オープン) にすることであるから，R_i を求めるための回路図は，図 10.37 のようになる．即ち，R_i は，4 Ω と $6+6=12$

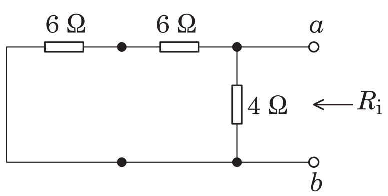


図 10.37 テブナン等価回路の R_i を求めるための図.

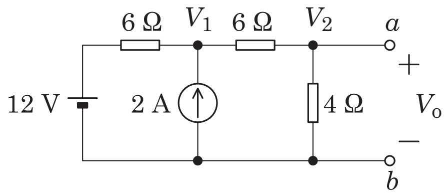


図 10.38 テブナン等価回路の V_o を求めるための図.

Ω の抵抗を並列接続したものとなるから，

$$R_i = 1\Big/\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) = 3\ \Omega.$$

1.2 V_o を求める.

次に，テブナン等価回路の電圧源の電圧 V_o を求める．テブナン等価回路の電圧源の電圧は，端子 ab に負荷を接続しないときの開放電圧であり，**図 10.38** における V_o となる.

図 10.38 のように V_1，V_2 を設定し，節点電圧法を適用すると，

$$2 = \frac{V_1-12}{6}+\frac{V_1-V_2}{6},$$
$$0 = \frac{V_2-V_1}{6}+\frac{V_2-0}{4}.$$

これを書き直すと，

$$24 = 2V_1 - V_2, \tag{10.79}$$
$$0 = -2V_1 + 5V_2. \tag{10.80}$$

上式から V_1 を消去して V_2（即ち V_o）を求めよう．式 (10.79) と式 (10.80) の和より，

$$24 = 4V_2 \quad \text{よって} \quad V_2 = V_o = 6\ \text{V}.$$

以上より，テブナン等価回路は，**図 10.39** のようになる.

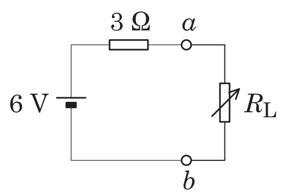


図 10.39 図 10.36 のテブナン等価回路.

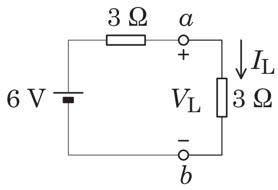


図 10.40 テブナン等価回路において負荷に最大電力を供給する負荷抵抗を接続した回路.

2. 最大電力

図 10.39 より，最大電力を与える負荷抵抗の値は

$$R_L = 3\ \Omega.$$

このときの回路は，**図 10.40** のようになる．負荷にかかる電圧を V_L，負荷に流れる電流を I_L とすると，最大電力は，

$$P_{\text{Max}} = V_L I_L = \frac{V_L^2}{R_L}$$

である．負荷に掛かる電圧 V_L は，電源の電圧を二つの 3 Ω の抵抗で分割した電圧となるから，

$$V_L = \frac{3}{3+3} \times 6 = 3\ \text{V}.$$

したがって，

$$P_{\text{Max}} = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{3^2}{3} = 3\ \text{W}$$

となる.

B. ノートンの定理（ノートン等価回路）

1. ノートン等価回路

図 10.41 の回路のノートン等価回路を求めよ.

2. 最大電力を与える負荷抵抗値

最大電力を供給するための R_L を求め，その最大電力を求めよ.

略解

1. ノートン等価回路

1.1 R_i を求める

まず，ノートンの等価回路における内部インピーダンス（この場合は，抵抗成分のみであるので内部抵抗）R_i

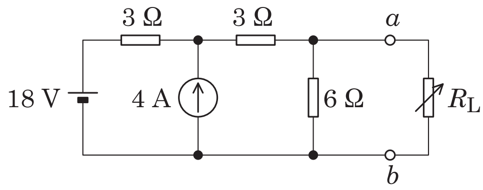


図 10.41 ノートン等価回路問題の図.

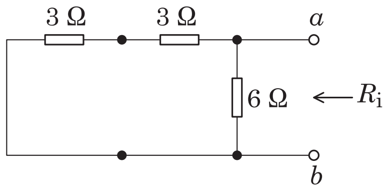


図 10.42 ノートン等価回路の R_i を求めるための図.

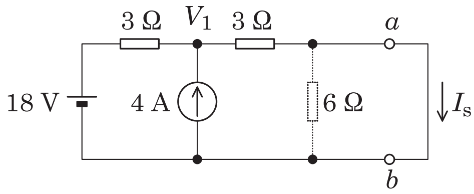


図 10.43 ノートン等価回路の I_s を求めるための図.

を求める．この R_i は，負荷が接続されている端子 ab の電源側（左側）の全ての電源を OFF にした場合に，端子 ab から電源側（左側）を見たときの抵抗である.

電圧源の OFF とは，電圧源を短絡（ショート）にすることであり，電流源の OFF とは，電流源を開放（オープン）にすることであるから，R_i を求めるための回路図は，**図 10.42** のようになる．即ち，R_i は，6 Ω と 3+3 = 6 Ω の抵抗を並列接続したものとなるから，

$$R_i = 1 \Big/ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 3\ \Omega.$$

1.1 I_s を求める

次に，ノートン等価回路の電流源の電流 I_s を求める．ノートン等価回路の電流源の電流は，端子 ab を短絡したときの短絡電流であり，**図 10.43** における I_s となる．このとき，端子 ab は短絡されているため，短絡経路と並列につながっている 6 Ω の抵抗には電流が流れなくなる．従って，わかりやすくするために，6 Ω の抵抗を外してしまおう.

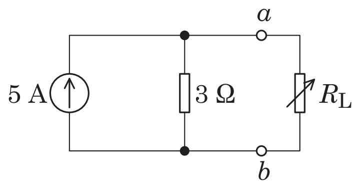


図 10.44 **図 10.41** のノートン等価回路.

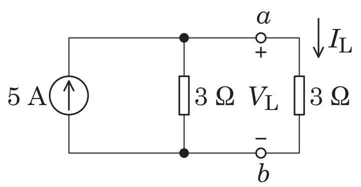


図 10.45 ノートン等価回路において最大電力を供給する回路.

図 10.43 のように V_1 を設定し，節点電位法を適用すると，

$$4 = \frac{V_1 - 18}{3} + \frac{V_1 - 0}{3}.$$

これより，

$$V_1 = 15\ \mathrm{V}.$$

これより，ab を流れる電流 I_s は，

$$I_s = \frac{V_1}{3} = \frac{15}{3} = 5\ \mathrm{A}.$$

以上より，ノートン等価回路は，**図 10.44** のようになる.

2. 最大電力

最大電力を供給する負荷は，前問の結果より $R_L = 3\ \Omega$ である．この時の回路は，**図 10.45** のようになる.

負荷に流れる電流 I_L は，電流源の電流 5 A を二つの 3 Ω の抵抗で分割した電流である．従って，

$$I_L = \frac{3}{3+3} \times 5 = 2.5\ \mathrm{A}.$$

従って，このときの負荷での消費電力は，

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{Max}} &= R_L I_L^2 = 3 \times 2.5^2 = 3 \times 6.25 \\ &= 18.75 = 18.8\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

となる.

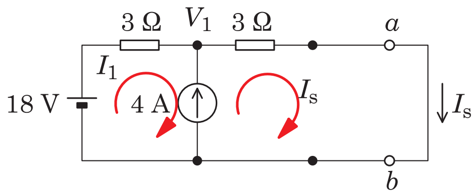


図 10.46 閉路電流法を用いて短絡電流を求める.

別解

I_s を求めるときに，閉路電流法を用いたらどうなるだろう？という質問があったので，追記します.

図 10.46 のように閉路電流をとると，I_1 を設定した閉路の方程式は,

$$18 = 3I_1 + ?\ (\text{電流源に掛かる電圧})$$

となってしまう．このようなときは，少しトリッキーなやり方をすることになる．即ち，電流源に掛かる電圧は，この時点ではわからないから，例えば，V_1 としておくのである．すると，

$$\begin{aligned} 18 &= 3I_1 + V_1, \\ V_1 &= 3I_s \end{aligned}$$

となる．これに加えて，もう一つ式が加わる．即ち，電流源の経路に流れる電流値が 4 A である，と既に与えられている点である．電流源には，I_s と，それと逆の I_1 が流れている，と設定しているから，

$$I_s - I_1 = 4.$$

以上の式を解けば，同じ結果が得られる.

即ち，閉路電流法や節点電位法で，「およっ！？どうすんの，これ？」と思ったら，未知の電圧，もしくは電流を仮定してみるのである．未知のものを一つ仮定したから，もう一つ式が必要になるが，それは，今回のように，ケースバイケースで見つかることになる.

参考文献

[1] http://homepage3.nifty.com/jm4jui-ken/newpage19.htm

[2] http://www.comet-ant.co.jp/new/HTML/products_peri_swr_1.html