

付録 A

複素数に関する補足

本章の目的は、本講義を受講する人に以下の事項を理解して頂くことである。

- 電気回路学では虚数単位を i の代わりに j で表す。
- 「 j との積」は「偏角を $\pi/2$ (90°) 増やすこと」。
- オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

A.1 はじめに

電気回路では虚数単位を多用する。その際、電気回路で電流を表すために用いられる i との混同を避けるために、虚数単位を j で表すので慣れて欲しい。

数直線上の数しか扱わない高校数学で学ぶ虚数単位 j は、単なる $\sqrt{-1}$ の代用品として導入される。これに対し、電気回路、電磁気学、量子力学などにおいて「波(波動)」が関与する現象を扱うときには、 j が持つ別の性質が多用される。即ち、 j をかけ算するということが、数直線を数平面(複素平面)にまで拡張した領域で定義された数(複素数)の偏角を $\pi/2$ だけ増やすこと、という性質である。この性質を理解するためには、 j を登場させる前に、まず数平面上の数の四則演算を定めておく必要がある。

また、電気回路では、交流信号を $A \sin(\omega t + \theta)$ と表す代わりに、振幅 A の情報(実効値)をその絶対値として有し、位相 θ の情報をその偏角として有する複素数で表す(フェーザ形式という)。その概念の導入の際に、オイラーの公式と呼ばれる以下の関係式を用いる。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (\text{A.1})$$

本章では、 j の基本的性質、上式における e の虚数乗という概念の導入、及びオイラーの公式の導出を行う。なお、虚数単位が関係する上記について既に知識を有し、かつ理解している人にとっては、本章は無用である。

A.2 演算法則の復習

ここでは、数の種類によらず適用できるような四則演算の概念的な本質を実数の演算から抽出し、それを数平面上の数の演算に適用する。 $j^2 = -1$ 等の虚数単位の性質は、その結果として現れることを示す。なお、四則演算のうち、引き算と割り算は、それぞれ足し算とかけ算の逆演算であるから、多少手抜きであるが、踏み込んだ議論はしないことにする。

A.2.1 足し算とは?

以下のような足し算は、一般的にはどのように解釈されているだろうか?

$$2 + 3 = 5 \quad (\text{A.2})$$

正の整数しか扱わなかった頃の解釈の仕方は、以下のようなイメージかと思う。

$$\square + \square\square = \square\square\square \quad (\text{A.3})$$

しかし、このような飛び飛びの値しかとらない数の概念にとらわれた解釈では、数というものを数直線上に連続して存在する実数へ、更には平面上に存在する数(複素数)にまで拡張できないのは明かである。足し算の本質的な点を考えると、「足し算とは原点のずらしである」と解釈すべきである。即ち、 $2 + 3 = 5$ という足し算の解釈の仕方としては、図 A.1 に示すように、以下のような解釈をするのがより本質的であろう。

- 足し算の本質は原点のずらし

数直線上で「0」を原点として「2」がある。このとき、この「2」を新たな原点としたら、「3」はもとの数直線上ではどこになるのか?

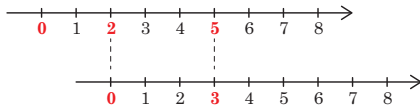


図 A.1 足し算の本質は目盛のずらし.

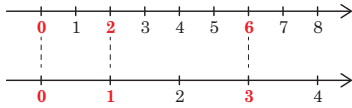


図 A.2 かけ算の本質は目盛のスケールの付け替え.

A.2.2 かけ算とは？

以下のようなかけ算は，一般的にはどのように解釈されているだろうか？

$$2 \times 3 = 6 \quad (\text{A.4})$$

正の整数しか扱わなかった頃の解釈の仕方は，以下のようないメージかと思う．

$$\square\square \square\square \square\square = \square\square\square\square\square\square \quad (\text{A.5})$$

では，以下のかけ算はどのように解釈するのだろうか？

$$(-2) \times (-3) = 6 \quad (\text{A.6})$$

負の数どうしのかけ算が正になることについては，「なぜか」については触れずに，強制的に覚え込まされたはずである．そこで，今一度，かけ算の概念の本質を考えると，「かけ算とは数直線上の目盛のスケールと方向の付け替え」であるといえる．従って， $2 \times 3 = 6$ の解釈の仕方としては，図 A.2 に示すように，以下のような解釈が，より本質的な解釈の仕方であろう．

- かけ算の本質は目盛のスケールと方向の付け替え
数直線上で「0」から「1」までの距離と方向を基準（ひと目盛）として「2」がある．このとき，「0」から「2」までの距離と方向を新たな基準（新たなひと目盛）とする目盛でみたら，「3」はもとの目盛ではどこになるのか？

このような解釈に基づいて $(-2) \times (-3) = 6$ を解釈すると，図 A.3 に示すように，以下のような解釈となる．

数直線上で「0」から「1」までの距離と方向を基準（ひと目盛）として「-2」がある．このとき，「0」か

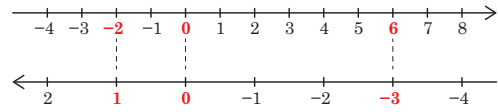


図 A.3 かけ算の本質に基づく $(-2) \times (-3) = 6$ の解釈.

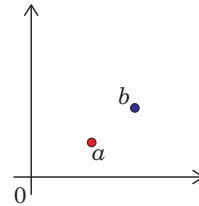


図 A.4 平面上の数（複素数）.

ら「-2」までの距離と方向を新たな基準（新たなひと目盛）とする目盛でみたら，「-3」はもとの目盛ではどこになるのか？

この解釈に従えば，強制的に記憶させられた以下のかけ算のルールが自動的に満たされる．

- (正) \times (正) = (正)
- (正) \times (負) = (負)
- (負) \times (負) = (正)

また，後述のように，この概念は数の概念を数直線から平面にまで拡張したときのかけ算にも拡張が可能なのである．

A.3 数平面上的の足し算とかけ算

ここでは，前節で抽出した足し算とかけ算の本質的な概念を，図 A.4 に示すような数平面上的の数 a と b の足し算とかけ算に適用し，その結果が数平面上的のどこになるのかを明かにする．

A.3.1 数平面上的の足し算

数平面上的の数 a と b の和 $a + b$ を概念通りに解釈すると以下ようになる．

- 平面上の $a + b$ の解釈
数平面上で「0」を原点として「 a 」がある．このとき，この「 a 」を新たな原点としたら，「 b 」はもとの数平面上的ではどこになるのか？

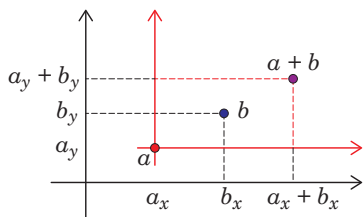


図 A.5 数平面上の数の足し算の概念.

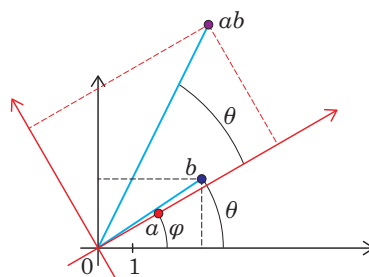


図 A.7 数平面上の数のかけ算の詳細.

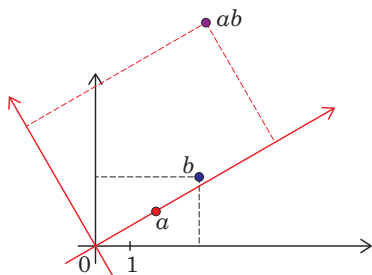


図 A.6 数平面上の数のかけ算の概念.

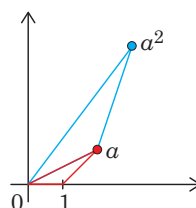


図 A.8 数平面上の数のべき乗.

これを図示すると、図 A.5 のようになる。a, b の位置を (数直線と平行な成分, 数直線と垂直な成分) という形式を用いて (a_x, a_y) , (b_x, b_y) と表すと、 $a+b$ の位置は、 (a_x+b_x, a_y+b_y) となっている。従って、以下のように言うことができる。

- 数平面上の数の和の計算結果は、数直線と平行な成分と垂直な成分をそれぞれ個別に和をとった結果を成分とする数となる。

A.3.2 数平面上の数のかけ算

数平面上の数 a と b の積 ab を概念通りに解釈すると以下のようになる。

- 数平面上の ab の解釈
数平面上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「a」と「b」がある。このとき、「0」から「a」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛で見たときの「b」は、もとの目盛ではどこになるのか？

これを図示すると、図 A.6 のようになる。ここで、a, b の位置を図 A.7 に示すように、原点からの距離の大きさ (以降、単に大きさという) $|a|, |b|$, 原点とその数を結ぶ線分が数直線となす角度 (以降、単に角度という) θ, ϕ

を用いて表すと (このような表現方法を極座標形式という)、ab の位置は、大きさが $|a||b|$, 角度が $\theta+\phi$ の数となる。従って、以下のように言うことができる。

- 数平面上の数の積の計算結果は、大きさについては積となり、角度については和となる。

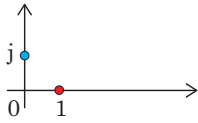
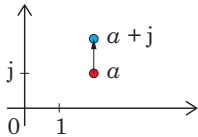
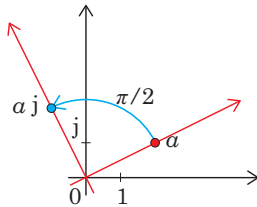
A.3.3 数平面上の数のべき乗

かけ算の概念に従って $aa = a^2$ を考えると、以下のようになる。

- 数平面上の a^2 の解釈
数平面上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「a」がある。このとき、「0」から「a」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛で見たときの「a」は、もとの目盛ではどこになるのか？

これを作図すると、図 A.8 に示すように、0, 1, a を頂点とする三角形と相似形の三角形 0, a, a² が 0, a を結ぶ辺の上に積み重なる。一方、a² を極座標形式で見れば、以下のように言うことができる。

- 数平面上の数の二乗は、大きさについては二乗となり、角度については二倍となる。

図 A.9 数平面上の垂直方向の基準 j .図 A.10 数平面上の数への j の足し算: $a+j$.図 A.11 数平面上の数への j のかけ算: aj .

これを一般的な n 乗に拡張すれば、以下のようになる。

- 数平面上の数の n 乗は、大きさについては n 乗となり、角度については n 倍となる。

A.4 数平面における垂直方向の基準 j

数平面上の数直線方向 (水平方向) の長さや方向の基準は 1 である。これに対し、図 A.9 に示すような数直線と垂直方向の長さや方向の基準を j とする。これを極座標形式で表せば、大きさが 1 、角度が $\pi/2$ (90°) の数である。以下では、この j の性質の一部を紹介する。

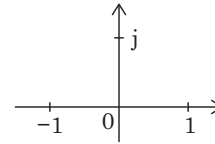
A.4.1 j の性質 (1): 足し算

数平面上の数 a と j の和 $a+j$ は、図 A.10 からわかるように、 a を垂直方向に j だけずらす。

A.4.2 j の性質 (2): かけ算

数平面上の数 a と j の積 aj は、極座標形式で表せば、

- 大きさが $|aj| = |a||j| = |a|$,
- 角度が $\theta + \pi/2$

図 A.12 $j \times j = -1$.

の数となる。従って、図 A.11 に示すように、

- 数平面上の数に j をかけ算すると、その数の偏角が $\pi/2$ (90°) 増える (原点まわりに $\pi/2$ (90°) 回転する)

ということがわかる。この性質が電気回路などの波動を扱う分野において多用される j の性質なのである。

j の性質 (3): 二乗

j^2 は、前の aj において $a=j$ とした場合に相当する。従って、 j^2 の大きさは 1 となり、その角度は π (180°) となる。これを図示すれば、図 A.12 に示すようになる。即ち、

$$j^2 = -1 \quad (\text{A.7})$$

となるのである。なお、この図を従前通りに重ねて描くと、わかりにくくなるので、分離して描いている。

即ち、数直線という井の中の蛙から、数平面に飛び出たことで、これまで数直線上ではあり得なかった二乗したらマイナスになる、という数がある、ということがわかったのである。高校では、「二次方程式の解の $\sqrt{\square}$ の中が負になったら、 $j = \sqrt{-1}$ を使って $\square + \square j$ のように書く」と突然言われて、それを使いこなす練習を一生懸命したかもしれない。それも一つの学習ではあるが、数直線という井戸の中にいた蛙が平面に飛び出たら、どんな数が考えられるであろう？というところから、こんな面白い数があったんだ、と発見的に考えた方が楽しくはないだろうか。

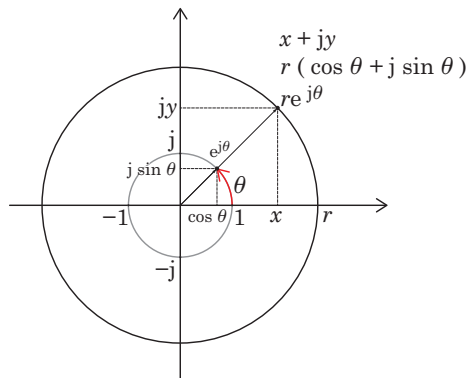


図 A.13 数平面上の $e^{j\theta}$.

A.5 数平面上の数の表現方法

数平面上の数の演算が決まったところで、その数の適切な表現方法を検討する必要がある。この表現方法が数直線上の数の計算とごちゃ混ぜにして計算してもつじまが合う表現方法でないと困る、というのはわかると思う。一つの表現方法は、

$$x + jy \quad (\text{A.8})$$

である。これによって数平面上の数を一つ特定することができる。また、 $j \times j = -1$ という性質があるので、 j を含んだ計算は、その性質を使えばよい、ということになる。この表現方法による数平面上の数の演算結果が概念通りの位置と対応することは、幾何学やベクトルの概念を使えば証明できるが、ここでは省略する。なお、 x の部分を「実数部 (又は実部)」、 jy の部分 (もしくは y だけ) を「虚数部 (又は虚部)」と呼ぶことになっている。ついでに他の数学用語を紹介する。平面上の数のことを「複素数」と呼ぶ。また、数平面のことを「複素平面」と呼ぶ。複素平面の数直線の軸を「実数軸 (又は実軸)」、それと垂直方向の軸を「虚数軸 (または虚軸)」という。

三角関数を知っていれば、極座標形式のパラメータである大きさ r と角度 θ を用いて、次のような表現方法も可能である、と発想するであろう。

$$r(\cos\theta + j\sin\theta) \quad (\text{A.9})$$

なお、正式な数学用語では、大きさを「絶対値」、角度を「偏角」と呼んでいる。

上記の方法以外にもう一つ大変重要な表現方法があ

る。それが次式である。

$$e^{j\theta} \quad \text{あるいは} \quad \exp(j\theta) \quad (\text{A.10})$$

この表現方法は、

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (\text{A.11})$$

という関係式を満たし、**オイラーの公式**と呼ばれている。

多くの教科書では、このようになるということを以下のようにテーラー展開を用いて説明している。即ち、 \sin と \cos が

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1}, \quad (\text{A.12})$$

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \quad (\text{A.13})$$

とテーラー展開されるのに対し、 e^x は、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (\text{A.14})$$

とテーラー展開される。この e^x のテーラー展開の x に $j\theta$ を入れれば、オイラーの公式が成立することが示される、というものである。

確かにそうなのだが、大学入学までの間に指数関数と三角関数を全く別々のものとして習ってきた後に、式 (A.11) を見せられたときの人間の姿としては、「何んじゃこりゃ」というのが自然な姿ではないだろうか。

更に、ノーベル賞受賞物理学者の朝永振一郎先生が述べているように [3]、そもそも指数関数のべき数が虚数であるとはどういうことか、という点についてもきちっと理解しておく必要がある。

次節では、多少無理をして式 (A.11) のような関係がもしかしたらあるのではないか、ということが高校生でも発想できるような道筋で作り話をしてみたいと思う。

A.6 オイラーの公式は高校生でも発想可能？

A.6.1 e^x , $\sin x$, $\cos x$ は似たものどうし

オイラーの公式へのきちっとした道のりは、後半で説明することにして、ここでは、高校数学の範囲内でオイラーの公式のような関係があるのではないか、という発想につながるかもしれない説明をしてみる。

指数関数 $u = e^x$ と三角関数 $v = \cos x$, $w = \sin x$ は、高校において全く別物として習うが、ここでは、それが兄弟のようなものである、ということをやまず示す。微積分

を習った段階で、以下の関係があることは既にわかっているはずである。

微分 0 回	u	v	w
微分 1 回	u	$-w$	v
微分 2 回	u	$-v$	$-w$
微分 3 回	u	w	$-v$
微分 4 回	u	v	w

多項式で表されている関数の多くは、何回も微分すると、0 になるのは知っていると思うが、この三つの関数は、何回微分しても 0 にならず、しかも自分自身に戻るのである。こうした共通性は、微分を習ったときに、気づいていると思う*1。

微分したときの性質が似ているというのは、どういう意味を持つか考えよう。 $y=f(x)$ という関数 f があったときに、その関数の微分係数

$$f'(x), y', \frac{d}{dx}f(x), \frac{dy}{dx}$$

というのは、その関数のある点における変化率である。即ち、微分係数は、関数の形を表しているといえる。実際に多くの関数が微分方程式によって定義されている。その挙動が似ているということは、関数自身がお互いに似ている、ということに他ならない。そうすると、なにがしかの演算処理でお互いを「=」で結べる可能性があるのでは？という発想にならないであろうか。

ここで、かなり無理矢理だが、 \cos の微分が仮想的に $+\sin$ になるとして (本当は $-\sin$ になる)、 $v+w$ の挙動をみてみたら*2、

微分 0 回	u	v	w	$v+w$
微分 1 回	u	w	v	$v+w$
微分 2 回	u	v	w	$v+w$
微分 3 回	u	w	v	$v+w$
微分 4 回	u	v	w	$v+w$

となる。即ち、指数関数と三角関数の和は、微分に対して全く同じ挙動をすることになる。

しかしながら、 \cos の微分が $+\sin$ になるなどという

ことは許されないので、上記の話はむちゃくちゃな論法である。正しくは、以下のようになるのである。

微分 0 回	u	v	w	$v+w$
微分 1 回	u	$-w$	v	$v-w$
微分 2 回	u	$-v$	$-w$	$-v-w$
微分 3 回	u	w	$-v$	$-v+w$
微分 4 回	u	v	w	$v+w$

しかし、うまく小細工をすれば、もしかすると、 \cos の微分が $+\sin$ になる、などというアホなことをしなくても、微分に対する挙動が全く同じになるような \sin と \cos の組み合わせがあるんじゃないか？、という発想がこうしたことから生まれてこないだろうか。

ここで、脚注で述べた j のべき乗が 4 回でもとに戻るということを思い出して、 j に登場して頂くことにより、凄いいことが起こるのである。即ち、 $y=v+jw$ とすると、

微分 0 回	u	v	w	$v+jw$	y
微分 1 回	u	$-w$	v	$-w+jv$	jy
微分 2 回	u	$-v$	$-w$	$-v-jw$	j^2y
微分 3 回	u	w	$-v$	$w-jv$	j^3y
微分 4 回	u	v	w	$v+jw$	j^4y

となるのである。この挙動はどこかで見たことがないだろうか。そう、 $z=e^{kx}$ なる関数の微分である。 z と y の微分に対する挙動を見比べてみると、以下のようになる。

微分 0 回	z	y
微分 1 回	kz	jy
微分 2 回	k^2z	j^2y
微分 3 回	k^3z	j^3y
微分 4 回	k^4z	j^4y

これを見たら、 $k=j$ としてしまいたくないであろうか。即ち、

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

という等式が成り立ってたりしないかなあ、という発想にならないだろうか。

ただ、この説明の論理の中には問題点もある。即ち、天から降ってきたかのように $v+jw$ という組み合わせが与えられてしまっているからである。この組み合わせを何らかの論理的思考に基づいた道筋で見出すためには、やはり、上っ面だけではなく、本質的なところから考察

*1 4 回微分したら \cos も \sin も自分自身に戻るが、実はこの「4 回で戻る」という性質が j と深い関係があるのである。 $j^2=-1$, $j^3=-j$, $j^4=j$.

*2 もしも \cos と \sin が微分に対してお互いに入れ替わるだけであれば、それらの和は微分に対して不変になるはず、という発想です。

する必要があると思われる。次節以降では、多少長くなるが、そのような観点で式 (A.11) に至る道筋を追うことにする。

A.7 $e^{j\theta}$ の定義

オイラーの公式では、 $e^{j\theta}$ のように、指数関数の指数 (べき乗のべき数) が実数ではなく虚数になっている。「べき乗って、同じ数を何回も掛けることだったよな」という理解をしていれば、「虚数回掛けるって、何やねん？」と思うのは自然なことである。従って、一足飛びに式 (A.11) に向かう前に、指数関数の指数を虚数も扱えるように拡張するところから始めなければならないことは理解できるはずである。このような拡張をするためには、平面数の演算法則を決めたときのように、指数関数の本質は何か、更にその前のべき乗の本質は何か、という点を見出さねばならない。

A.7.1 そもそも「べき乗」とは何なのか？

かつて、べき数として正の整数しか扱わなかった幼稚な頃のべき乗のことを思い出すと、 $f(x) = a^x$ とは以下のような解釈だった。

- x が正の整数だけのとき
 a^x とは、 a を x 回かけ算したものであり、これを a の x 乗と称する。

この概念では、 x に虚数を入れると、虚数回かけ算するという意味不明の状態になる。また、実数まで範囲を狭めても、0.5 回かけ算するなどという意味不明の状態になる。そこで、まず、実数全体をべき数として受け入れるための拡張作業を行う。一般には、以下のような論理でべき数として許可できる範囲を実数全体まで広げている。

- x として 0 も許可したいならば…
指数法則に従うと、 $a^x \times a^0 = a^x$ だから、 $a^0 = 1$ としよう。
- x として負の整数も許可したいならば…
指数法則に従うと、 $a^{-x} \times a^x = a^0 = 1$ だから、 $a^{-x} = 1/a^x$ としよう。
- x として m/n (有理数) も許可したいならば…
 $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ としよう。
- x として無理数も許可したいならば…

無理数を無限小数で表したときの収束値としよう。即ち、無理数 x の近似値を有理数 m/n で表し、それをどんどん x に近づけていったときの $a^{m/n}$ の収束点が a^x である、という決め方である。

以上のようなべき乗の拡張解釈によって、数直線上の実数が全てべき数になり得ることになった。しかし、

- x として虚数 (或いは複素数) も許可したいなら…

については、どうしたらよいのであろうか。

数直線上の数の足し算、かけ算を複素数に拡張したときに、足し算とかけ算の根本は何か、ということに目を向けた。べき乗についても、べき乗という操作の本質は何だろうか？というところに目を向けることになる。

A.7.2 べき乗の拡張定義

多少天下りのであるが、べき乗を拡張してきたときに、頻繁に用いていたのが、指数法則である。べき乗の根本的性質は「指数法則」と呼ばれている演算法則にあるのではないか、という発想になる。即ち、べき乗というものを関数 $f(x)$ で表したときに、次の関係を満たすということが、対象とする数 x の種類に依存しないべき乗の本質である、とは考えられないだろうか。

$$f(x+y) = f(x)f(y). \quad (\text{A.15})$$

この法則が、実数 x と実数 a (但し、 $a \neq 0$) に対して定義された

$$f(x) = a^x \quad (\text{A.16})$$

を包含しているということは、次節で確認する。また、 $f(x)$ の特徴であり、もう一つの定義にもなっている

その微分係数が常に自分自身 ($f(x)$) に比例する

という $f(x)$ の根本的性質も式 (A.15) から導かれる。

なお、式 (A.15) に正の整数だけを入れるとわかるのだが、「同じ数を何回もかけ算する」における「何回も」が「 $(x+y)$ 」に対応し、「かけ算する」が $f(x)f(y)$ に対応している。この式を見ても、すぐに見えてこないのが $f(x) = a^x$ としたときの a である。何回もかけ算する「同じ数」(即ち、べき乗の底) が式の中には現れてこない。これは、 a がこの式の性質の一つとして隠れてしまっているからである。これについては、他の性質とともに次節で述べる。

A.7.3 $f(x+y)=f(x)f(y)$ のべき乗としての性質

式 (A.15) は、極めて奥の深い関係式であるが、そこに隠れている性質は、ぱっと見ただけではすぐには判らないので、少し探る必要がある。まず、式 (A.15) で定められた $f(x)$ が、従来のべき乗、並びにその実数全体への拡張版と整合していることを確認しておこう。

底

$f(x)=a^x$ というのがもともとのべき乗の定義であった。すると、 a が指定されていないのにべき乗になるのか？ということになる。これについては、式 (A.15) において、 x 回かけ算した結果である $f(x)$ に対して、もう 1 回だけ同じ数をかけ算するという状況を考えればすぐにわかる。この状況は、 $y=1$ に相当するから、

$$f(x+1)=f(x)f(1) \quad (\text{A.17})$$

となり、 $f(1)$ が底なのである。即ち、 $f(x)=a^x$ と表すならば、

$$f(1)=a \quad (\text{A.18})$$

となる。

正の整数乗

a^x において、 x が正の整数の場合には、 x は 1 を x 個足したもので、であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+1+\cdots) \\ &= f(1)f(1)\cdots \\ &= f(1)^x = a^x \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる。

0 乗

もともとのべき乗では、0 を除く如何なる a に対しても、 $a^0=1$ であった。式 (A.15) においても $f(0)=1$ となることを示そう。これは、 $y=0$ の状況に相当する、即ち、

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0) \quad (\text{A.20})$$

となり、このような関係を如何なる $f(x)$ に対しても満たすためには、

$$f(0)=1 \quad (\text{A.21})$$

となるのである。

有理数乗

多少トリッキーであるが、1 を $1/n$ を n 個だけ加えたものと見れば、

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{A.22})$$

となる。 $f(1)=a$ であるから、

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \quad (\text{A.23})$$

となり、 n 乗根を表していることになる。次に、 $x=m/n$ とすれば、 x は $1/n$ を m 個だけ加えたものであるから、

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^m=(\sqrt[n]{a})^m \quad (\text{A.24})$$

となる。即ち、 x を正の整数から有理数にまで拡張した状態を再現できる。

無理数乗

無理数乗については、結局のところ、もともとのべき乗を無理数に拡張したときと同じ論理を使うことになる。即ち、無理数 x の近似値を有理数 m/n で表し、それをどんどん x に近づけていったときの $f(m/n)$ の収束点が $f(x)$ である、という定義の仕方になるのであろう。

以上の準備をすれば、 x が実数の場合には、式 (A.15) を満たす関数 $f(x)$ が、式 (A.16) で表される従来の指数関数を表している、ということを受け入れてもらえるのではないと思う。 $f(x)$ が連続的に変化できる x の関数となったので、次は、この関数の特徴を見出すために、その微分係数が如何なるものになるかを考察する。

A.7.4 $f(x+y)=f(x)f(y)$ の特徴抽出

$y=f(x)$ の x が $x+\Delta x$ に変化したときの x の変化分 Δx に対する y の変化分 Δy の比 $\Delta y/\Delta x$ は、 x が Δx だけ変化したときの変化率である。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限における変化率がその関数の微分係数となり、その関数の変化の特徴を表す(即ち、その関数の定義になり得る)。

ここでは、式 (A.15) で定められた $f(x)$ の微分係数の性質から $f(x)$ の特徴を抽出する。適切な微分方程式が得られれば、それがもう一つの $f(x)$ の定義式となる。

まず、 x が正の整数だけの場合、即ち、べき乗の場合について考察する。このとき、 Δx として取り得る最小値は 1 である。即ち、かけ算の回数を 1 回だけ増やすと

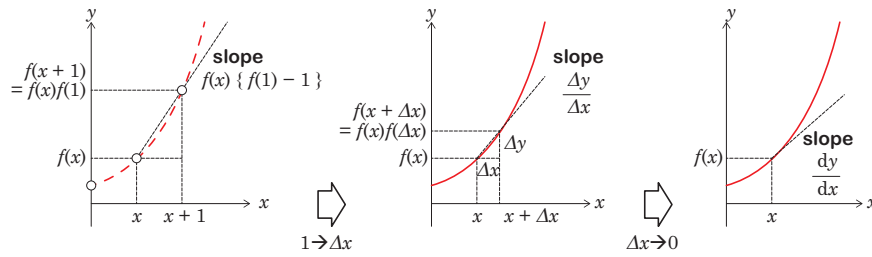


図 A.14 $f(x)$ の変化率と微分係数.

いう行為に対する y の値の増加分が変化率となる. これを計算すると以下ようになる.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x) \{f(1) - 1\} \quad (\text{A.25})$$

となる. $f(1)$ は定数であるから, この式は, かけ算の回数を 1 回だけ増やしたときの関数値の変化率が $f(x)$ の値に比例しており, その比例係数が $f(1) - 1$ である, ということの意味する. これは, 1 以外の数をべき乗の底とする場合, 即ち, $a = f(1) = 1 + r$ と表される場合, 何回かかけ算した後にもう一回かけ算したときの増加率が r である, ということの意味する. この性質は利率が r の複利計算と同じであり, 指数関数の定義の起源にもなっている.

次に, x として連続的に変化できる実数全体を許容した場合について考察する. この場合, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限状態, 即ち, 微分係数が得られる. x における $f(x)$ の微分係数を $f'(x) (= dy/dx)$ とすると,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.26})$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.27})$$

$$= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \quad (\text{A.28})$$

ここで,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \quad (\text{A.29})$$

であるが, これは定数なので, それを k とすると,

$$f'(x) = k f(x) \quad (\text{A.30})$$

となる. この式は,

$f(x)$ の変化率が常に $f(x)$ に比例している,

ということの意味しており, $f(x)$ というものがどういった関数なのか, という重要な特徴を表す微分方程式となっ

ている. また, その根源にあるのが, 式 (A.26) から式 (A.28) への式変形の過程で使用しているべき乗の本質を表す関係式 (A.15) であることが理解されよう.

なお, 多くの物理現象がこのような振る舞いをするということが知られており, そのような現象を記述する微分方程式として式 (A.30) が利用されている. また, $f(0) = 1$ であることを示す式 (A.21) と合わせることによって, 後で出てくる指数関数 e^{kx} の定義式にもなっているのである. 従って, 式 (A.30) において, $k = j$ としたらどうなるかということを見れば, $e^{j\theta}$ が如何なる関数なのかがわかるはずである. その前の準備として, $k = 1$ の場合 (即ち, e^x となる場合) について考察しておこう. なぜなら, e がまだ定義されていないからである.

A.8 実数の指数関数 e^x

式 (A.30) において $k = f'(0) = 1$ としたものは, 微分した関数が微分する前の関数と全く同じになる, という特殊な関数である. $f(x)$ が a^x と表されることから, こうした制限条件が課せられるのは a ぐらいである. 従って, この条件を満たす特殊な a が存在すると予測される. それを求めてみよう^{*3}.

$f'(0) = 1$ とは,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \quad (\text{A.31})$$

ということであるから, a を求めるために以下のような小細工的な計算をする. 即ち,

$$\frac{a(\Delta x)^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \quad (\text{A.32})$$

を満たす $a(\Delta x)$ があるとし, この $a(\Delta x)$ が $\Delta x \rightarrow 0$ のときに収束する先が a であると考えて, a の姿が如何なる

^{*3} それが e なのだが, ここではまだ e を定義していないので, まだ知らんフリをして下さい.

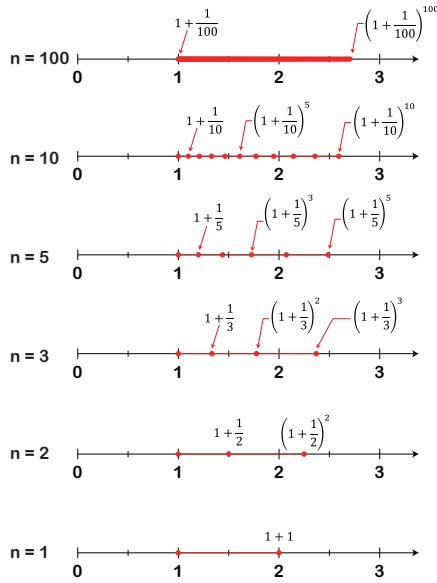


図 A.15 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) を $n = 2, 3, 4, 5, 10, 100$ について計算した結果. n が増加するに従い, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$ は実数軸上を e に向かって進み, $n \rightarrow \infty$ では, 実数軸上の e に収束する.

ものかを調べる. 上式を変形すれば,

$$a(\Delta x) = (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} \quad (\text{A.33})$$

となるから,

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} \quad (\text{A.34})$$

である. ここで, Δx の代わりに $1/n$ と置き換えれば, $\Delta x \rightarrow 0$ は, $n \rightarrow \infty$ に置き換えることができる. 従って,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{A.35})$$

となる. 上式の右辺は $n \rightarrow \infty$ のときに収束することがわかっており, 収束先の a を e という特別の記号で表す. 即ち,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828 \dots \quad (\text{A.36})$$

これをネイピア数と言う. 試しに, n を徐々に大きくしていったときの状況を実数軸上でプロットすると, 図 A.15 のようになる. $n \rightarrow \infty$ のときに, e に相当する点に収束している様子がわかる.

以上のことから, 指数法則 $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たし, かつ $f'(0) = 1$ となる関数を上記のような e を

使って,

$$f(x) = e^x \quad (\text{A.37})$$

と表す, ということになる. これが一般に指数関数と呼ばれている関数である.

なお, 式 (A.36) において, $1/n$ を x/n に置き換えた

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (\text{A.38})$$

という式において, $n = kx$ となる k を用意すると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kx} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right\}^x \\ &= \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right\}^x \\ &= e^x \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

となることから, 式 (A.38) も指数関数を表す式であると見ることができる. 即ち, e^x の定義式として,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (\text{A.40})$$

も OK, ということになる.

この定義式の導出過程に重要なことが潜んでいることに注意して欲しい. 即ち,

- e の x 乗は, $1 + x/n$ を n 回かけ算した数の $n \rightarrow \infty$ における極限值である,

という点である. 後述のように, この等価変換によって, e を虚数乗するという意味不明の行為を複素平面上で具体的に検討することができるようになる.

A.9 虚数の指数関数 $e^{j\theta}$

ここから, オイラーの公式にある e の虚数乗とも言うべきものを考える. 同じ数を何回もかけ算するというべき乗の概念では, べき数に虚数を許容することは意味不明な行為であるが, べき乗の概念を拡張した式 (A.15), 式 (A.30), 式 (A.40) は, x として虚数を許可してはいけない, という制約は無い. そこで, まず, 純虚数を導入し易い式 (A.30) で示した微分方程式による定義を用いることにする. 即ち,

$$f'(x) = kf(x), \quad f(0) = 1 \quad (\text{A.41})$$

である. この微分方程式の解は,

$$f(x) = e^{kx} \quad (\text{A.42})$$

となる。従って、 x として虚数を許可する代わりに、式 (A.41)において、単純に k を j という虚数単位に入れ替えて、

$$g'(\theta) = jg(\theta), \quad g(0) = 1 \quad (\text{A.43})$$

という微分方程式を解いたときに得られる $g(\theta)$ が $e^{j\theta}$ と表されるべき関数となる。

A.9.1 オイラーの公式の確認

ここでは、まず、オイラーの公式の右辺が微分方程式 (A.43) を満たしているかどうかを確認しよう。即ち、

$$g(\theta) = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.44})$$

なる関数がどこからともなく与えられたとする。上式を式 (A.43) に代入すれば、

$$g'(\theta) = -\sin \theta + j \cos \theta = jg(\theta) \quad (\text{A.45})$$

となる。確かに式 (A.43) の微分方程式において $k = j$ としたものになっている。また、 $g(0)$ を求めると、

$$g(0) = \cos 0 + j \sin 0 = 1 \quad (\text{A.46})$$

となっており、式 (A.43) の条件も満たしている。従って、この $g(\theta)$ という関数は、 $e^{j\theta}$ と表されるべき性質を持っていることになる。即ち、

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.47})$$

という等式が成り立つ。

なぜ、そんな右辺を考えついたのか、という発想の根源はともかくとして、このオイラーの公式は、図 A.16 に示すように、 $e^{j\theta}$ なる数が、複素平面上で、原点から距離 1 だけ離れており、実数軸から角度 θ ラジアンだけ回転したところに位置する、という標記になっている。 $e^{j\theta}$ が複素平面上のこのような数である、ということは、

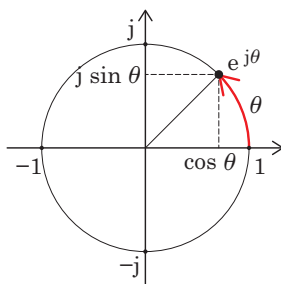


図 A.16 複素平面上的の $e^{j\theta}$.

これまでに見てきたどの定義式を見ても、ぱっとは判らないのに対し、極めて明快な式であることは誰もが認めるであろう。

しかし、指数関数の指数が虚数になることによって、なぜ「回転」や「円運動」に関係する \cos や \sin が出現するのか、という疑問に対する答えはこの確認作業からは見いだせない。その答えは、指数関数を「同じ数を何回もかけ算する」と解釈している限り恐らく判らない。既に述べた指数関数の本質的特徴に目を向ける必要がある。

A.9.2 なぜ \cos , \sin が出てくるのか (1)

ここでは、

- 指数関数の変化率は自分自身に比例する。

という特徴に目を向けて、式 (A.41) と式 (A.43) が意味するところを再考する。両者ともに共通なのは、初期値が 1 であることと、その変化率が自分自身に比例していることである。異なる点は、その比例係数 k が 1 なのか、 j なのか、という点だけである。微分方程式というのは、 x や θ という独立変数の変化に対して $f(x)$ や $g(\theta)$ の値が如何なる変化をするのか、ということを表す方程式である。従って、この違いが関数値の動きに現れることになるはずである、その「動き」を見てみよう。

動きを表すときには、独立変数として時間 t をとると物理的な描像を描き易い。そこで、方程式を以下のように書こう。

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = 1f(t), \quad f(0) = 1 \quad (\text{A.48})$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} g(t) = jg(t), \quad g(0) = 1 \quad (\text{A.49})$$

このようにすると、 $f'(t)$ や $g'(t)$ は $f(t)$ や $g(t)$ が表す点が数直線上や複素平面上を動くときの速度という物理的な意味を持つことになる。すると、以下のような描像を描くことができる。

- $k = 1$ の場合:
速度として与えられる方向が常に実数軸方向である。従って、 $f(t)$ で表される点は、図 A.17 に示すように、 $f(0) = 1$ を出発点として、実数軸上を速度 $f'(t) = f(t)$ で移動する。
- $k = j$ の場合:
速度として与えられる方向が実数軸方向ではなく、

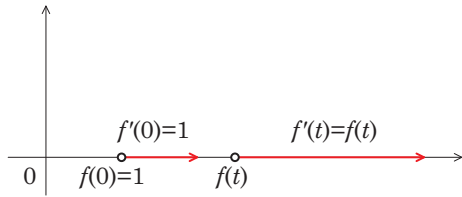


図 A.17 $f'(t) = 1f(t)$ で表される点の挙動.

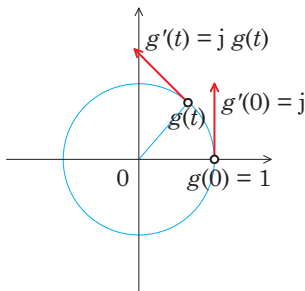


図 A.18 $g'(t) = jg(t)$ で表される点の挙動.

j と $g(t)$ のかけ算によって決まる方向、即ち、常に 0 から $g(t)$ に向かう線分と直角の方向になる。その大きさ $|g'(t)|$ は j をかけ算しても変わらず 1 である。物理を多少学んだ者であれば、これが、図 A.18 に示すように、 0 を中心とする半径 1 の円周上を接線方向に速度 1 で等速運動する円運動に他ならない、ということがわかるであろう。接線方向の速度が 1 であるから、時刻 t までの間に動いた軌跡(円弧)の長さは、 t ラジアンとなる。従って、 $g(t)$ の実部は $\cos t$ と表され、虚部は $\sin t$ と表されることになるのである。

A.9.3 なぜ \cos , \sin が出てくるのか (2)

前節では、 k という係数が 1 か j かによって、微分方程式で規定される関数が実数軸上を動くのか、複素平面上を回転するのか、が決まっていることを述べた。ここでは、 k そのものについて考察する。というのは、 $k=1$ から $f(t) = e^t = (e^1)^t$ の底に相当する e^1 が定義されたのに対して、 $k=j$ から $g(t) = e^{jt} = (e^j)^t$ の底に相当する e^j が定義されることになるからである。

$k = f'(0)$ は、指数法則を満たす $f(t)$ の微分係数を計算する過程において現れており、 $k=1$ とは、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t) - 1}{\Delta t} = 1 \quad (\text{A.50})$$

ということであった。 $f(t) = a^t$ と表されるとしたときに、上式を満たす a が

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{A.51})$$

となり、この a を $e = e^1$ と定めたのである。また、 $e^t = (e^1)^t$ は、上式の $1/n$ を t/n にすることで定義されることを確認した。即ち、

$$e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \quad (\text{A.52})$$

によって e^t を定義した。これにより、

- e の t 乗は、 $1 + t/n$ を n 回かけ算した数の $n \rightarrow \infty$ における極限值である、

ということを導いた。

以下では、この拡張可能な指数関数の概念に基づいて、指数が虚数の場合について考察する。 $k=j$ にした場合には、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(\Delta t) - 1}{\Delta t} = j \quad (\text{A.53})$$

ということを意味する。ここで $g(t) = b^t$ と表されるとすると、上式を満たす b は、

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{n}\right)^n \quad (\text{A.54})$$

となる。この b は、 e^j と表されるべきものであり、 $e^{jt} = (e^j)^t$ の底になる数である。これが如何なる数であるかを原理に基づいて求めてみよう。

図 A.19 は、

$$\left(1 + \frac{j}{n}\right)^m, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A.55})$$

を、 $n = 2, 3, 5, 10, 100$ について計算した結果である。

- $n=1$ の場合は、 $1+j$ となる。即ち、実数軸の 1 から虚数軸方向に (= 垂直に) 1 だけ立ち上がった位置となる。
- $n=2$ の場合は、 $1+j$ の虚数部が $1/2$ に縮小したものがべき乗の底となる。その 1 乗は、そのものである。その 2 乗は、複素数のかけ算の原理から、 $0, 1, 1+j/2$ を結んだ直角三角形の斜辺の上に相似形の直角三角形を積んだときの頂点の位置になる。
- $n=3$ の場合は、 $1+j$ の虚数部が更に $1/3$ に縮小したものがべき乗の底となって、 3 乗まで計算することになる。即ち、相似形の直角三角形を 3 回積み上げるたときの頂点の位置になる。

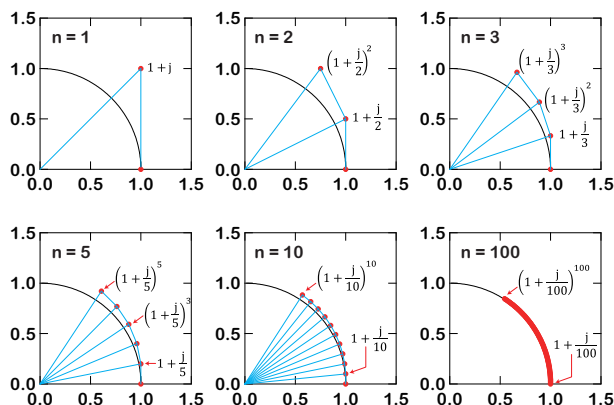


図 A.19 $\left(1 + \frac{j}{n}\right)^m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) を $n = 2, 3, 5, 10, 100$ について計算した結果. n が増加するに従い, $\left(1 + \frac{j}{n}\right)^m$ は半径 1 の円周上に位置するようになる. $n \rightarrow \infty$ では, 原点から距離 1 だけ離れ, 実数軸から偏角 1 ラジアン回転した位置に収束する.

- $n = 4$ の場合は, ...
- $n = 5$ の場合は, ...

と計算を実施してゆくと, $n \rightarrow \infty$ のときに, 以下の状況に収束して行くことがわかる.

- 大きさ
1 に足される数がどんどん小さくなるため, 大きさは 1 に近づく
- 偏角
直角三角形を積み上げるときに, 必ず一つ下の斜辺の上に次の直角三角形の底辺が乗ることになる. 従って, べき乗を繰り返すごとに, 複素平面上的の点は, 前の斜辺に対して直角方向に移動する. その移動距離は $1/n$ であり, その方向は, 半径 1 の円の接線方向に近づく. 接線方向への $1/n$ のずれを n 回繰り返すという動きは, n が大きくなれば, 実数軸上の 1 から開始して, 半径 1 の円周を 1 ラジアンだけ移動した位置に移動する, という動きに近づくことになる.

この結果から, 指数が虚数になることによって円運動が関係してくることがわかる. また, その根本的な起源は, 先述の微分方程式の場合と同様に, かけ算すると常に原点からその点を結ぶ線分に対して直角方向に動く, という事なのである.

以上の考察を基にすれば, e^{jt} が複素平面上的の如何なる数であるかもわかる. 即ち,

$$e^{jt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{jt}{n}\right)^n \quad (\text{A.56})$$

であるから, 回転する角度が 1 ラジアンではなく t ラジアンとなる. 従って, その実部は $\cos t$ となり, その虚部は $\sin t$ と表されることになるのである.

A.9.4 e^x の更なる拡張

式 (A.40) を二項展開すると, 最終的には,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{A.57})$$

という式が得られる.

e^x がこのように表されてしまうということが何を意味するのか, については私もまだ知らないが, この式は, 四則演算のみで計算可能であるため, 計算機で e^x を計算するときに都合がよく, 実際に利用されている. また, オイラーの公式を有無を言わず証明するための道具としても良く使われている.

また, e^x という関数が式 (A.57) のようにべき級数展開で表されることによって, 以下のように e^x を更に新たな領域に拡張することが可能である.

- x に行列を入れる
- x に演算子を入れる

以上のように, 物事の上っ面だけではなく, 根本的な点を明かにすれば, 様々な展開が拓けるということがわかると思う. これは, あらゆることに共通することであると思う.

追記

こうして $e^{j\theta}$ なるものを再考すると, 円運動や振動を記述するための \cos や \sin という概念は, $e^{j\theta}$ の概念に付随するもの, と見えてしまう. そもそも, \cos と \sin という関数は, どちらか片方でもう片方を表すことができるのであるから, 「どちらか片方でよいではないか», あるいは「これら二つの関数の挙動を支配しているもっと上位の関数があるはずだ」と考えてもおかしくは無いであろう. それが $e^{j\theta}$ である, と見ることができないだろうか. もしも, \cos や \sin という概念が見出されるよりも先に平面数の概念が確立されて $e^{j\theta}$ の概念が見出されて

いたら、 \cos や \sin などという関数はこの世に現れることなく、 $e^{j\theta}$ の実部や虚部を表す、 $\text{reexp } \theta$ や、 $\text{imexp } \theta$ などという関数が使われることになっていたかもしれないと想像されるが、いかがだろうか。

謝辞

上記の考え方や、後述のべき乗の拡張概念、複利の概念を用いたオイラーの公式の説明などは私のオリジナルではなく、中学生の頃に「甲斐さんところ」で教わったものである。こうした斬新な教育をされた甲斐 喬先生に敬意を表すとともに、深く感謝したい。

参考文献

- [1] 遠山啓：数学入門(上)(1959, 岩波書店).
- [2] 遠山啓：数学入門(下)(1960, 岩波書店).
- [3] 朝永振一郎：科学者の自由な楽園(2000, 岩波書店).
- [4] 示野信一：複素数とはなにか(2012, 講談社).