豆知識

Q 値の定義：半値幅方式

共振回路のインピーダンス (Z) やアドミタンス (Y) の周波数依存性は，共振周波数でピークを持つという特徴がある．Q 値の定義の一つは，このピークの鋭さで表される．具体的には，次式で定義される [1–14].

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

ω_0 共振角周波数

ω_1，ω_2 L と C が電源に対して直列の場合
$|Y|$ が共振時の $1/\sqrt{2}$ 倍
（$|Z|$ は $\sqrt{2}$ 倍）
になる角周波数 ($\omega_1 < \omega_2$)

L と C が電源に対して並列の場合
$|Z|$ が共振時の $1/\sqrt{2}$ 倍
（$|Y|$ は $\sqrt{2}$ 倍）
になる角周波数 ($\omega_1 < \omega_2$)

$\Delta\omega$ $\omega_2 - \omega_1$

この定義の仕方を「半値幅方式」ということにする．

「$1/\sqrt{2}$ 倍になるとき」や「$\sqrt{2}$ 倍になるとき」なのに「半値 (1/2)」と呼称する理由は，以下のようにエネルギー（または単位時間当たりのエネルギー＝電力）の周波数特性に換算したものが，より本質的と考えられているためである．[*1]

- 定電圧源を接続した直列共振回路の電流は，
  角周波数が ω_0 のときに極大となり，
  ω_1 と ω_2 のときには，その $1/\sqrt{2}$ になる．
  $|$ 電流 $|^2$ に比例する電力は 1/2 となる．
- 定電流源を接続した並列共振回路の電圧は，
  角周波数が ω_0 のときに極大となり，
  ω_1 と ω_2 のときには，その $1/\sqrt{2}$ になる．
  $|$ 電圧 $|^2$ に比例する電力は 1/2 となる．

[*1] そのため，英語では ω_1 と ω_2 を half-power angular frequency といい，$\Delta\omega$ のことを half-power bandwidth という．電力減少を dB（デシベル，単位として読むときは棒読みのディービーと読むことが多い）で表すと，1/2 倍は −3 dB なので，half-power bandwidth を 3dB bandwidth ともいう．

豆知識

Q 値の定義：エネルギー方式

共振回路の Q 値の定義は複数あるが，その中でも，共振回路のエネルギー保持能力に着目し，その良さを数値化した次式が最も本質的とされている．[*2]

$$Q = 2\pi \frac{W_\mathrm{S}}{W_\mathrm{D}} \tag{1}$$

W_S 回路が定常的に保持するエネルギー

W_D R で一周期に消費されるエネルギー

【回路が保持するエネルギーとその保持能力とは？】

回路によるエネルギー保持の概念を理解するための最も良い題材は，電源の無い LC 回路である．L と C はエネルギーを吸収または放出する回路素子であり，R のようにエネルギーを消費しない．したがって，L と C を組み合わせると，電源がなくても，L-C 間のエネルギー交換を繰り返しながら，エネルギーを保持することが可能となる．[*3] このとき，L と C が保持するエネルギーの合計を「回路が保持するエネルギー」という．

純粋な L と C だけの回路の場合，L と C が持っていた初期エネルギーの合計は，時間が経過しても不変となる（エネルギー保存則による）．回路に R が含まれている場合には，R による電力消費によって回路が保持するエネルギーが徐々に減少する．「回路のエネルギー保持能力」とは，このときの「エネルギーの減少のし難さ」であり，R における電力消費が小さいほど高い．

以下では，回路が保持するエネルギーとその保持能力に関する上記の概念を，電源が接続されている場合に適用する．

【電源が接続されているときは？】

電源が接続されている RLC 回路の場合には，R での消費エネルギー分が電源から補給されるため，回路が保持するエネルギーが減少することはなく，[*4] 定常的にエネルギーが保持される．

[*2] 本質的だが実用的ではない（W_S はそう簡単に計測できないから）．

[*3] RLC 回路に電源が接続されていない場合の L-C 間のエネルギー交換と保持については，豆知識「電源のない LC 回路」と「電源のない RLC 回路」を参照．

[*4] 厳密には「単調減少」というべき．なぜなら，後述するように正弦波振動する場合があるから．

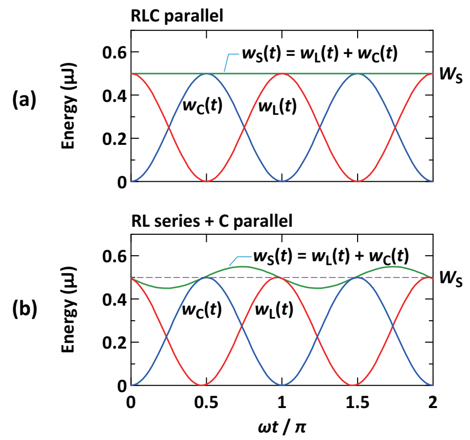

図 1 RLC 並列回路におけるエネルギー波形と RL 直列・C 並列回路におけるエネルギー波形.

例えば，直列のみ・並列のみの RLC 回路の場合には，**図 1** (a) に示すように，回路が保持する瞬時エネルギーは一定値になり，それが Q 値の定義における W_S となる.[*5]

一方，直列と並列が混在している RLC 回路の場合には，**図 1** (b) に示すように，回路が保持する瞬時エネルギーがある平均値を中心として正弦波振動し，一定値にはならない.[*6] このような場合には，回路が保持する瞬時エネルギーの平均値を W_S とする．なぜなら，平均値からずれた成分（＝正弦波）は，平均するとゼロになり，実効的には回路が保持するエネルギーに寄与していないからである．このとき，単に「平均値をとる」だけでは，上記のような物理的意味が伝わりにくいため，本書では，式 (1) で示したように，W_S を

「回路が定常的に保持するエネルギー」

と定義している.

[*5] 豆知識「直列 RLC 回路」と「並列 RLC 回路」を参照.
[*6] 直列と並列が混在した RLC 回路の豆知識・課題を参照.

豆知識

Q 値の定義：W_S の定義について

エネルギー方式の Q 値の定義に使われる W_S の定義は，教科書によって異なっている．具体例は以下の通りである.

(1)「回路が保持するエネルギー」[15–17]

(2)「回路が保持するエネルギーの最大値」[18–23]

(3)「回路が保持するエネルギーの平均値」[24]

ここで，「回路が保持するエネルギー」は，次式で定義される.

$$w_S(t) = w_L(t) + w_C(t)$$

$w_L(t)$	L が保持する瞬時エネルギー
$w_C(t)$	C が保持する瞬時エネルギー
$w_S(t)$	「回路が保持するエネルギー」

これらの先行事例に対して，本稿では，W_S を

(4)「回路が定常的に保持するエネルギー」

と定義した．この表現を採用した理由は，先の豆知識で述べた通りである．ここでは，先行事例の「ここがマズイ」という点を示す.

- (1) の問題点
  (1) では，$W_S = w_S(t)$ とする．回路によっては，**図 1** (b) に示すように，$w_S(t)$ が正弦波振動する．つまり，定数で表すことができない.
- (2) の問題点
  (2) では，$W_S = \max[w_S(t)]$ とする．これにより，「定数で表すことができない」という (1) の問題点は解決される．しかし，平均値からずれたエネルギー成分は，実効的には回路に保持されていない成分であり（先述），それを W_S に含めるのは不適切である.
- (3) の問題点
  (3) では，$W_S = \mathrm{ave}[w_S(t)]$ とする．これにより，(1) と (2) の問題点が解決される．しかし，単に「平均をとる」だけでは，その物理的意味が伝わらない（先述）.

豆知識

W_S を「最大値」とする定義がなぜ存在するのか？

これは，Q 値の歴史的経緯に関係しているようである．Q 値というものに着目された初期の頃は，Q 値をリアクタンス（L と C）の損失の少なさ（抵抗成分の寄与がいかに少ないか）を表すものであった [25]．このとき，C の損失は無視できるほど小さかったのに対し，L の損失は無視できなかったということもあり，当初の Q 値の定義式は，L と R だけに着目した以下のような式になっていた [26]．

$$Q = \frac{\text{coil reactance}}{\text{coil resistance}} = \frac{\omega L}{R}$$

また，この式の分子分母に $\frac{1}{2}I_\mathrm{m}^2$ をかけると，

$$\begin{aligned}
Q &= \omega \frac{\frac{1}{2}LI_\mathrm{m}^2}{\frac{1}{2}RI_\mathrm{m}^2} \\
&= \omega \frac{L\text{ に蓄積されるエネルギーの最大値}}{R\text{ の平均電力}} \\
&= 2\pi \frac{L\text{ に蓄積されるエネルギーの最大値}}{R\text{ の平均電力}\times T} \\
&= 2\pi \frac{L\text{ に蓄積されるエネルギーの最大値}}{R\text{ で一周期に消費されるエネルギー}}
\end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ \text{は回路の電圧電流波形の一周期}$$

となることから，エネルギーに着目した Q 値の解釈の仕方も当時からあった [27]．[*7]「最大値」という表現は，上記の解釈で Q 値を表す式の分子に現れる．ただし，このときに最大値となるのは「L に蓄積されるエネルギー」であり，「回路に蓄積されるエネルギー」ではない．

あくまでも私の推測であるが，いくつかの教科書において，Q 値の定義式の分子が「回路に蓄積されるエネルギーの最大値」と表現されている原因は，「L に蓄積されるエネルギーの最大値」という表現の「の最大値」の前を，あまり深く考えずに，「回路に蓄積されるエネルギー」にしてしまったことにあるのではないかと考えている．このようにしてしまうと，問題が発生することについては，先述の通りである．

[*7] この定義であれば，周波数が必ずしも共振周波数でなくても Q 値が定義できることがわかる．現在は，Q 値と言えば，共振時において定義されるものであるが，損失のある L だけの Q 値や，損失のある C だけの Q 値という意味で，上記のような定義を使うことがしばしばある．

豆知識

Q 値の定義：エネルギー方式と半値幅方式の関係

RLC 回路のエネルギー方式と半値幅方式の Q 値は，

- **直列のみ・並列のみの場合は，**
  厳密に一致する．[*8]
- **直列と並列が混在する場合は，**
  厳密には一致しない． ただし，
  $Q > 10$ ならば，よい近似となる．[*9]

二つの異なる視点で定義した Q 値が（近似を伴うものの）一致するということは，Q 値が以下の二つの回路特性を同時に表す指標となっていることを意味する．

- Q 値は周波数特性のピークの鋭さの指標
- Q 値はエネルギー保持能力の高さの指標

また，エネルギー方式と半値幅方式の Q 値が（近似を伴うものの）一致することから，どちらも以下に示す R 依存性を持つ．

- 直列抵抗が小さいほど Q 値が大きい．
- 並列抵抗が大きいほど Q 値が大きい．

[*8] 具体例については，直列のみ・並列のみの RLC 回路に関する豆知識と課題を参照されたし．

[*9] 具体例については，直列と並列が混在した RLC 回路に関する豆知識と課題を参照されたし．

豆知識

Q 値の定義：電力を用いた方式

電気回路では，エネルギー方式の Q 値の算出に使われる「保持されるエネルギー」と「消費されるエネルギー」の比を「単位時間当たり（つまり電力）」に変換したもので表すこともできる．したがって，以下のように Q 値を電力で表す作法もある [28–32].

$$Q = \frac{P_{\mathrm{q}}}{P}$$

P_{q}　共振時の L の無効電力の大きさ
または
共振時の C の無効電力の大きさ
どちらでもよい

P　共振時の R の有効電力

複素電力で学んだ無効電力は，一般に Q という文字で表されるが，Q 値の Q と混同しないように，ここでは，P_{q} とした．

【参考：エネルギーと電力の関係】

- L が保持する最大エネルギー．
  $\Rightarrow$　L の無効電力波形が $0 \rightarrow$ 正 $\rightarrow 0$ となる時間帯での無効電力の積分値.
- C が保持する最大エネルギー．
  $\Rightarrow$　C の無効電力波形が $0 \rightarrow$ 正 $\rightarrow 0$ となる時間帯での無効電力の積分値.
- R で一周期に消費されるエネルギー．
  $\Rightarrow$　R の有効電力波形の一周期の積分値.

エネルギー方式の Q 値の定義は，積分後の量で定義されているが，積分前の量で定義しても等価である．かつ，L が保持する最大エネルギーと C が保持する最大エネルギーは回路が定常的に保持するエネルギーと等価である．[*10] 以上のことから，本節のような電力による定義が可能となる．

[*10] 各種 RLC 回路の Q 値に関する豆知識・課題を参照.

参考文献

[1] F.E. Terman: Electronic and Radio Engineering (McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1955) p. 49.

[2] G. Williams: An Introduction to Electrical Circuit Theory (Macmillan Press, London, 1973) p. 117.

[3] H.L. Krauss, C.W. Bostian, and F.H. Raab: Solid State Radio Engineering (John Wiley & Sons, New York, 1980) p. 41.

[4] A.J. Pointon and H.M. Howarth: AC and DC Network Theory (Springer-Science+Business Media, Berlin, 1991) p. 79-83.

[5] N.M. Morris: Electrical Circuit Analysis and Design 10th Ed. (Macmillan Press, London, 1993) pp. 305-307.

[6] E. Hughes, J. Hiley, K. Brown, and I.M. Smith: Hughes Electrical and Electronic Technology 11th Ed. (Pearson Education, Essex, 2012) p. 311-314.

[7] A.H. Robbins and W.C. Miller: Circuit Analysis - Theory and Practice 5th Ed. (Delmar Cengage Learning, Clifton Park, NY, 2013) p. 745-748.

[8] R.L. Boylestad: Introductory Circuit Analysis 12th Ed. (Pearson Education, Essex, 2014) p. 886-890.

[9] H.W. Jackson, D. Temple, B. Kelly, K. Craigs, and L. Fuentes Introduction to Electric Circuits 10th Ed. (Oxford University Press Canada, Ontario, 2019) p. 751-753.

[10] C. Alexander and M. Sadiku: Fundamentals of Electric Circuits 7th Ed. (McGraw-Hill Education, New York, NY 2021) pp. 629-630.

[11] J. Bird: Bird's Electrical Circuit Theory and Technology 7th Ed. (Routeledge, Oxon, 2022) p.525.

[12] T.L. Floyd and D.M. Buchla: Principles of Electric Circuits (Conventional Current) 10th Ed. (Pearson Education, Essex, 2022) p. 831-835.

[13] W.H. Hayt, Jr., J.E. Kemmerly, J.D. Phillips, and S.M. Durbin: Engineering Circuit Analysis 10th Ed. (McGraw-Hill LLC, New York, NY, 2024) pp. 636-642.

[14] M. Steer: Microwave and RF Design III - Networks (LibreTexts, 2024) 5.2 `https://eng.libretexts.org/`

[15] F.E. Terman: Electronic and Radio Engineering (McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1955) p. 45.

[16] A.J. Pointon and H.M. Howarth: AC and DC Network Theory (Springer-Science+Business Media, Berlin, 1991) p. 88.

[17] N.M. Morris: Electrical Circuit Analysis and Design 10th Ed. (Macmillan Press, London, 1993) pp. 302-303.

[18] G. Williams: An Introduction to Electrical Circuit Theory (Macmillan Press, London, 1973) p. 114.

[19] H.L. Krauss, C.W. Bostian, and F.H. Raab: Solid State Radio Engineering (John Wiley & Sons, New York, 1980) p. 41.

[20] T. Glisson, Jr.: Introduction to Circuit Analysis and Design (Springer-Science+Business Media, Berlin, 2011) p. 338.

[21] J. Bird: Bird's Electrical Circuit Theory and Technology 7th Ed. (Routeledge, Oxon, 2022) p.520.

[22] C. Alexander and M. Sadiku: Fundamentals of Electric Circuits 7th Ed. (McGraw-Hill Education, New York, NY 2021) pp. 629-630.

[23] W.H. Hayt, Jr., J.E. Kemmerly, J.D. Phillips, and S.M. Durbin: Engineering Circuit Analysis 10th Ed. (McGraw-Hill LLC, New York, NY, 2024) pp. 632-634.

[24] M. Steer: Microwave and RF Design III - Networks (LibreTexts, 2024) 5.2 `https://eng.libretexts.org/`

[25] E.I. Green: The story of Q, American Scientist **43**, 584-594 (1955). also available as Bell Telephone Systems Technical Publications Monograph 2491.

[26] F.E. Terman: Radio Engineering 2nd Ed. (McGraw-Hill, New York, NY, 1937) p. 37

[27] H.A. Thompson and F.E. Terman: Alternating Current Transient Circuit Analysis (McGraw-Hill, New York, NY, 1955) p. 144-145.

[28] H.W. Jackson, D. Temple, B. Kelly, K. Craigs, and L. Fuentes: Introduction to Electric Circuits 10th Ed. (Oxford University Press Canada, Ontario, 2019) p. 748.

[29] E. Hughes, J. Hiley, K. Brown, and I.M. Smith: Hughes Electrical and Electronic Technology 11th Ed. (Pearson Education, Essex, 2012) p. 309-310.

[30] A.H. Robbins and W.C. Miller: Circuit Analysis - Theory and Practice 5th Ed. (Delmar Cengage Learning, Clifton Park, NY, 2013) p. 741.

[31] R.L. Boylestad: Introductory Circuit Analysis 12th Ed. (Pearson Education, Essex, 2014) p. 882-883.

[32] T.L. Floyd and D.M. Buchla: Principles of Electric Circuits (Conventional Current) 10th Ed. (Pearson Education, Essex, 2022) p. 689.