

豆知識

直列と並列の等価変換 (R と L)

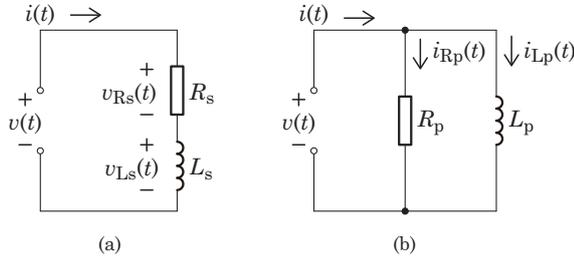


図 1 RL 直列回路の並列回路への等価変換.

• インピーダンス

【回路 (a)】

$$Z_a = R_s + j\omega L_s$$

• アドミタンス

【回路 (a)】

$$Y_a = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} - \frac{j\omega L_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} \quad (1)$$

$$Y_a = |Y_a| \angle \phi_a$$

$$|Y_a| = \frac{1}{\sqrt{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}} \quad \tan \phi_a = -\frac{\omega L_s}{R_s}$$

【回路 (b)】

$$Y_b = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} \quad (2)$$

$$Y_b = |Y_b| \angle \phi_b$$

$$|Y_b| = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} \quad \tan \phi_b = -\frac{R_p}{\omega L_p}$$

• 等価条件

$$R_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{R_s} \quad \omega L_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{\omega L_s} \quad (3)$$

のとき,

$$Y_a = Y_b \stackrel{\text{def}}{=} Y \quad \phi_a = \phi_b \stackrel{\text{def}}{=} \phi$$

Y_a [式 (1)] と Y_b [式 (2)] の実部どうし, 虚部どうしが等しいことから導かれる.

• 具体例に用いる定数

以降で具体例を示すときの回路定数は以下の通り.

$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$R_s = 10 \Omega$$

$$L_s = 10 \text{ mH}$$

$$Z = R_s + j\omega L_s = (10 + j10) \Omega$$

$$= (14.1 \angle 45^\circ) \Omega$$

$$Y = \frac{1}{Z} = (0.0707 \angle -45^\circ) \text{ S}$$

$$= (0.05 - j0.05) \text{ S} = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L_p}$$

$$R_p = 20 \Omega$$

$$L_p = 20 \text{ mH}$$

• 等価回路素子の電流・電圧・電力・エネルギー

図 1 のように等価変換すると、端子間の電流・電圧は完全に一致するが、各回路素子の電流・電圧は異なったものとなる。図 2 はその具体例。

一方、各回路素子の電力とエネルギーに関しては、以下に示すように、いくつかの因子については一致する。

- R_s と R_p の電力（有効電力）は同じ。
- R_s と R_p の一周期の消費エネルギーは同じ。
- L_s と L_p の電力（無効電力）は同じ。
- L_s と L_p の電力波形は、位相以外は同じ。
- L_s と L_p の最大保持エネルギーは同じ。

これらの性質は、RC 回路の場合においても同様に成り立ち、*1 直列と並列が混在した回路を、直列のみ・並列のみの回路に等価変換して Q 値を求めるときの妥当性を保証するものとなる。

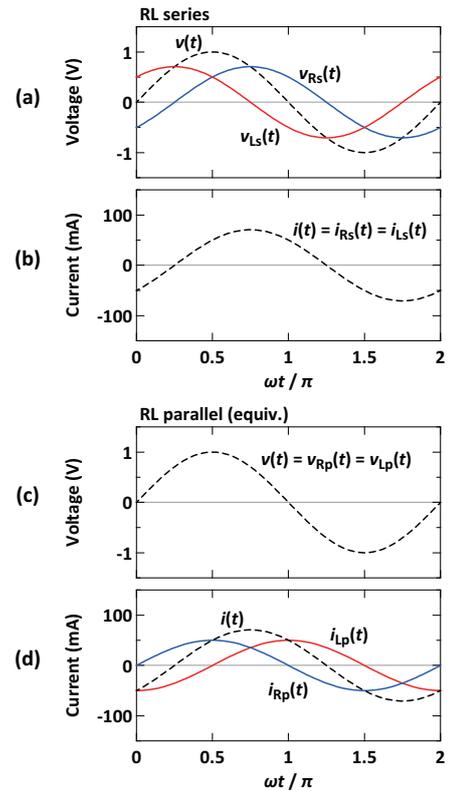


図 2 RL 直列回路の電圧波形 (a) と電流波形 (b). それと等価な並列回路の電圧波形 (c) と電流波形 (d).

*1 豆知識「直列と並列の等価変換 (R と C)」を参照。

• 回路 (a) の電圧・電流

【フェーザ】

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

$$I = YV = \frac{V}{R_s + j\omega L_s} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

$$I_m = |Y|V_m = \frac{V_m}{\sqrt{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}} \quad (4)$$

$$\tan \phi = -\frac{\omega L_s}{R_s}$$

$$V = V_{R_s} + V_{L_s}$$

$$I = I_{R_s} = I_{L_s}$$

$$V_{R_s} = R_s I \quad I = \frac{V_{R_s}}{R_s}$$

$$V_{L_s} = j\omega L_s I \quad I = \frac{V_{L_s}}{j\omega L_s}$$

【波形】

$$v(t) = V_m \sin \omega t \\ = v_{R_s}(t) + v_{L_s}(t)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi) \\ = i_{R_s}(t) = i_{L_s}(t)$$

$$v_{R_s}(t) = R_s i_{R_s}(t) \\ = R_s i(t) = R_s I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$i_{R_s}(t) = \frac{v_{R_s}(t)}{R_s} = \frac{V_m}{R_s} \sin(\omega t + \phi) \\ = i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$v_{L_s}(t) = L_s \frac{di_{L_s}(t)}{dt} \\ = L_s \frac{di(t)}{dt} = \omega L_s I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i_{L_s}(t) = \frac{1}{L_s} \int v_{L_s}(t) dt \\ = i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

• 回路 (b) の電圧・電流

【フェーザ】

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

$$I = YV = V \left[\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

$$I_m = |Y|V_m = V_m \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}}$$

$$\tan \phi = -\frac{R_p}{\omega L_p}$$

$$V = V_{R_p} = V_{L_p}$$

$$I = I_{R_p} + I_{L_p}$$

$$V = R_p I_{R_p} \quad I_{R_p} = \frac{V}{R_p}$$

$$V = j\omega L I_{L_p} \quad I_{L_p} = \frac{V}{j\omega L}$$

【波形】

$$v(t) = V_m \sin \omega t \\ = v_{R_p}(t) = v_{L_p}(t)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi) \\ = i_{R_p}(t) + i_{L_p}(t)$$

$$v_{R_p}(t) = R_p i_{R_p}(t) \\ = v(t) = V_m \sin \omega t$$

$$i_{R_p}(t) = \frac{v_{R_p}(t)}{R_p} \\ = \frac{v(t)}{R_p} = \frac{V_m}{R_p} \sin \omega t$$

$$v_{L_p}(t) = L_p \frac{di_{L_p}(t)}{dt} \\ = v(t) = V_m \sin \omega t$$

$$i_{L_p}(t) = \frac{1}{L_p} \int v_{L_p}(t) dt \\ = \frac{1}{L_p} \int v(t) dt = -\frac{V_m}{\omega L_p} \cos \omega t$$

• 抵抗の有効電力の等価性

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

R_s と R_p の電力（有効電力）は同じ。

$$\frac{1}{2} R_s I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} \stackrel{\text{def}}{=} P_R$$

証明

R_s , R_p の複素電力を S_{R_s} , S_{R_p} とすると、*2

$$\begin{aligned} S_{R_s} &= V_{R_s} I^* = [R_s I] I^* = R_s I I^* = R_s |I|^2 \\ &= \frac{1}{2} R_s I_m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{R_p} &= V I_{R_p}^* = V \left[\frac{V}{R_p} \right]^* = \frac{V V^*}{R_p} = \frac{|V|^2}{R_p} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} \end{aligned}$$

一方、等価条件 [式 (3)] より、

$$R_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{R_s}$$

I_m と V_m の関係式 [式 (4)] より、

$$V_m^2 = I_m^2 (R_s^2 + \omega^2 L_s^2)$$

であるから、

$$\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} = \frac{1}{2} \frac{I_m^2 (R_s^2 + \omega^2 L_s^2)}{\frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{R_s}} = \frac{1}{2} R_s I_m^2$$

よって、回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、 R_s と R_p の複素電力（有効電力）は等しい。

• 抵抗の電力波形

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

R_s と R_p の電力波形は、位相以外は同じ。

$$p_{R_s}(t) = P_R [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \quad (5)$$

$$p_{R_p}(t) = P_R [1 - \cos 2\omega t] \quad (6)$$

$p_{R_s}(t)$ と $p_{R_p}(t)$ は、どちらも振動中心（平均値）が P_R 、振幅が P_R 、周波数が 2ω の波形であり、異なるのは位相だけとなる。図 3 (a), (c) はその具体例。

証明

R_s , R_p の電力波形を $p_{R_s}(t)$, $p_{R_p}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} p_{R_s}(t) &= v_{R_s}(t) i(t) = [R_s i(t)] i(t) = R_s i(t)^2 \\ &= R_s I_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} R_s I_m^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= P_R [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{R_p}(t) &= v(t) i_{R_p}(t) = v(t) \left[\frac{v(t)}{R_p} \right] = \frac{v(t)^2}{R_p} \\ &= \frac{V_m^2}{R_p} \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} [1 - \cos 2\omega t] \\ &= P_R [1 - \cos 2\omega t] \end{aligned}$$

*2 電力を計算する素子が抵抗だけなので、複素電力を計算しても実部（有効電力）だけとなる。

• 抵抗の消費エネルギーの等価性

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき,

R_s と R_p の一周期の消費エネルギーは同じ.

$$W_{R_s} = W_{R_p} = P_R T = P_R \frac{2\pi}{\omega}$$

証明

抵抗の一周期の消費エネルギーは, 抵抗の電力の一周期の時間積分である. R_s , R_p の電力は, 式 (5), 式 (6) より, どちらも平均値が P_R の正弦波である. したがって, それらの一周期の積分値を W_{R_s} , W_{R_p} とし, 一周期を $T = 2\pi/\omega$ とすると, どちらも $P_R T$ となる. 図 3 (b), (d) はその具体例.

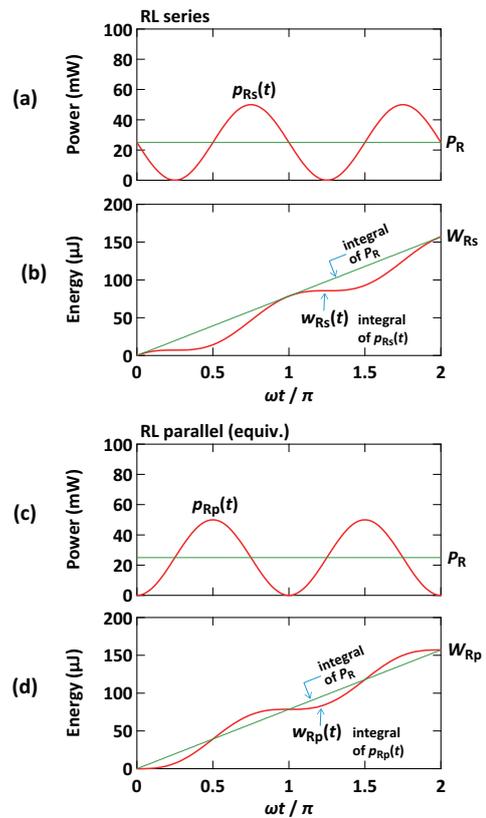


図 3 RL 直列回路 [回路 (a)] の R_s の電力波形 (a) とエネルギー波形 (b). それと等価な並列回路 [回路 (c)] の R_p の電力波形 (c) とエネルギー波形 (d).

• コイルの無効電力の等価性

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

L_s と L_p の電力（無効電力）は同じ。

$$\frac{1}{2} \omega L_s I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega L_p} \stackrel{\text{def}}{=} P_L$$

証明

L_s , L_p の複素電力を S_{L_s} , S_{L_p} とすると、*3

$$\begin{aligned} S_{L_s} &= V_{L_s} I^* = [j\omega L_s I] I^* = j\omega L_s I I^* = j\omega L_s |I|^2 \\ &= j \frac{1}{2} \omega L_s I_m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{L_p} &= V I_{L_p}^* = V \left[\frac{V}{j\omega L_p} \right]^* = \frac{V V^*}{-j\omega L_p} = \frac{|V|^2}{-j\omega L_p} \\ &= j \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega L_p} \end{aligned}$$

一方、等価条件 [式 (3)] より、

$$\omega L_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{\omega L_s}$$

I_m と V_m の関係式 [式 (4)] より、

$$V_m^2 = I_m^2 (R_s^2 + \omega^2 L_s^2)$$

であるから、

$$\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega L_p} = \frac{1}{2} \frac{I_m^2 (R_s^2 + \omega^2 L_s^2)}{\frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{\omega L_s}} = \frac{1}{2} \omega L_s I_m^2$$

よって、回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、 L_s と L_p の複素電力（無効電力）は等しい。

• コイルの電力波形

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

L_s と L_p の電力波形は、位相以外は同じ。

$$p_{L_s}(t) = P_L \sin(2\omega t + 2\phi) \quad (7)$$

$$p_{L_p}(t) = -P_L \sin 2\omega t \quad (8)$$

これらは、どちらも振動中心が 0（平均値がゼロ⇒無効電力）、振幅が P_L 、周波数が 2ω の波形であり、異なるのは位相だけとなる。図 4 (a), (c) はその具体例。

証明

$L_s(t)$, $L_p(t)$ の電力波形を $p_{L_s}(t)$, $p_{L_p}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} p_{L_s}(t) &= v_{L_s}(t) i(t) = \left[L_s \frac{di(t)}{dt} \right] i(t) \\ &= \omega L_s I_m^2 \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} \omega L_s I_m^2 \sin(2\omega t + 2\phi) \\ &= P_L \sin(2\omega t + 2\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{L_p}(t) &= v(t) i_{L_p}(t) = v(t) \frac{1}{L} \int v(t) dt \\ &= -\frac{V_m^2}{\omega L_p} \sin \omega t \cos \omega t \\ &= -\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega L_p} \sin 2\omega t \\ &= -P_L \sin 2\omega t \end{aligned}$$

*3 電力を計算する素子がコイルだけなので、複素電力を計算しても、虚部（無効電力）だけとなる。

• コイルの最大保持エネルギーの等価性

図 1 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

L_s と L_p の最大保持エネルギーは同じ.

$$W_{Ls(\max)} = W_{Lp(\max)} = \frac{P_L}{\omega}$$

証明

L_s に保持されるエネルギー $w_{Ls}(t)$ は、式 (7) で与えられる電力 $p_{Ls}(t)$ の積分値である.

$$\begin{aligned} w_{Ls}(t) &= \int p_{Ls}(t) dt = P_L \int \sin(2\omega t + 2\phi) dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega} \cos(2\omega t + 2\phi) + K_{Ls} \end{aligned}$$

コイルが保持するエネルギーは、コイルの電流がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} i(t) = 0 &\Rightarrow \sin(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \\ \omega t + \phi = n\pi &\Rightarrow 2\omega t + 2\phi = 2n\pi \Rightarrow \\ \cos(2\omega t + 2\phi) &= 1 \text{ のときに } w_{Ls}(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_{Ls} = \frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_{Ls}(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega} [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= \frac{P_L}{\omega} \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

L_p に保持されるエネルギー $w_{Lp}(t)$ は、式 (8) で与えられる電力 $p_{Lp}(t)$ の積分値である.

$$\begin{aligned} w_{Lp}(t) &= \int p_{Lp}(t) dt = P_L \int (-\sin 2\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega} \cos 2\omega t + K_{Lp} \end{aligned}$$

コイルが保持するエネルギーは、コイルの電流がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} i_{Lp}(t) = 0 &\Rightarrow \cos \omega t = 0 \Rightarrow \\ \omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi &\Rightarrow 2\omega t = \pi + 2n\pi \Rightarrow \\ \cos 2\omega t = -1 &\text{ のときに } w_{Lp}(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_{Lp} = \frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_{Lp}(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_L}{\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= \frac{P_L}{\omega} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

以上より、 $w_{Ls}(t)$ 、 $w_{Lp}(t)$ の最大値 $W_{Ls(\max)}$ 、 $W_{Lp(\max)}$ は、

$$W_{Ls(\max)} = W_{Lp(\max)} = \frac{P_L}{\omega}$$

図 4 (b), (d) はその具体例.

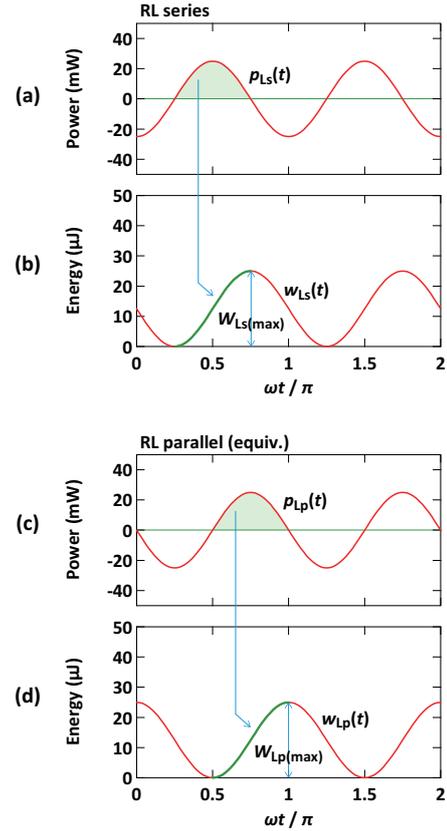


図 4 RL 直列接続回路 [回路 (a)] の L_s の電力波形 (a) とエネルギー波形 (b). それと等価な並列回路 [回路 (b)] の L_p の電力波形 (c) とエネルギー波形 (d).

豆知識

直列と並列の等価変換 (R と C)

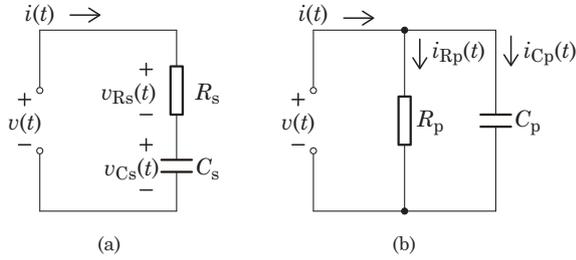


図 5 RC 直列回路の並列回路への等価変換.

• インピーダンス

【回路 (a)】

$$Z_a = R_s + \frac{1}{j\omega C_s}$$

• アドミタンス

【回路 (a)】

$$Y_a = \frac{1}{R_s + \frac{1}{j\omega C_s}} = \frac{R_s}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} - \frac{j\omega C_s}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} \quad (9)$$

$$Y_a = |Y_a| \angle \phi_a$$

$$|Y_a| = \frac{1}{\sqrt{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}} \quad \tan \phi_a = \frac{1}{\omega C_s R_s}$$

【回路 (b)】

$$Y_b = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \quad (10)$$

$$Y_b = |Y_b| \angle \phi_b$$

$$|Y_b| = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C_p^2} \quad \tan \phi_b = \omega C_p R_p$$

• 等価条件

$$R_p = \frac{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}{R_s} \quad \omega C_p = \frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} \quad (11)$$

のとき,

$$Y_a = Y_b \stackrel{\text{def}}{=} Y \quad \phi_a = \phi_b \stackrel{\text{def}}{=} \phi$$

Y_a [式 (9)] と Y_b [式 (10)] の実部どうし, 虚部どうしが等しいことから導かれる.

• 具体例に用いる定数

以降で具体例を示すときの回路定数は以下の通り.

$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$R_s = 10 \ \Omega$$

$$C_s = 100 \ \mu\text{F}$$

$$Z = R_s - j\frac{1}{\omega C_s} = (10 - j10) \ \Omega$$

$$= (14.1 \angle -45^\circ) \ \Omega$$

$$Y = \frac{1}{Z} = (0.0707 \angle 45^\circ) \ \text{S}$$

$$= (0.05 + j0.05) \ \text{S} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p$$

$$R_p = 20 \ \Omega$$

$$C_p = 50 \ \mu\text{F}$$

• 等価回路素子の電流・電圧・電力・エネルギー

図5のように等価変換すると、端子間の電流・電圧は完全に一致するが、各回路素子の電流・電圧は異なったものとなる。図6はその具体例。

一方、各回路素子の電力とエネルギーに関しては、以下に示すように、いくつかの因子については一致する。

- R_s と R_p の電力（有効電力）は同じ。
- R_s と R_p の一周期の消費エネルギーは同じ。
- C_s と C_p の電力（無効電力）は同じ。
- C_s と C_p の電力波形は、位相以外は同じ。
- C_s と C_p の最大保持エネルギーは同じ。

これらの性質は、RL回路の場合においても同様に成り立ち、*4 直列と並列が混在した回路を、直列のみ・並列のみの回路に等価変換して Q 値を求めるときの妥当性を保証するものとなる。

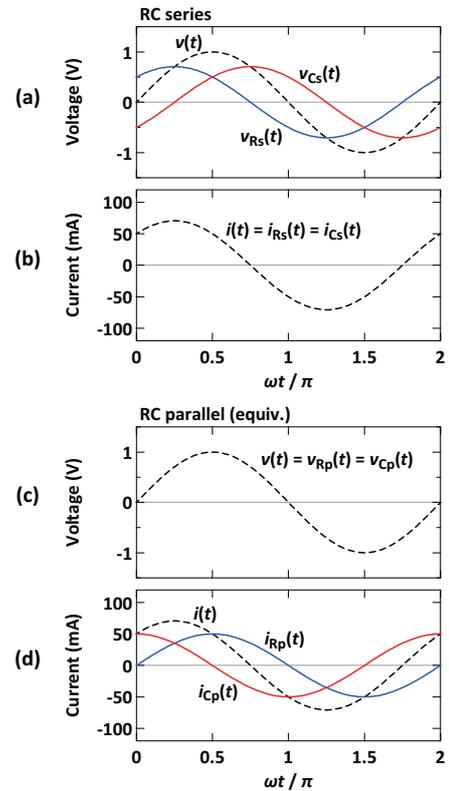


図6 RC直列回路の電圧波形(a)と電流波形(b)。それと等価な並列回路の電圧波形(c)と電流波形(d)。

*4 豆知識「直列と並列の等価変換 (R と L)」を参照。

• 回路 (a) の電圧・電流

【フェーザ】

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

$$I = YV = \frac{V}{R_s + \frac{1}{j\omega C_s}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

$$I_m = |Y|V_m = \frac{V_m}{\sqrt{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}} \quad (12)$$

$$\tan \phi = \frac{1}{\omega C_s R_s}$$

$$V = V_{R_s} + V_{C_s}$$

$$I = I_{R_s} = I_{C_s}$$

$$V_{R_s} = R_s I_{R_s} \quad I_{R_s} = \frac{V_{R_s}}{R_s}$$

$$V_{C_s} = \frac{I_{C_s}}{j\omega C_s} \quad I_{C_s} = j\omega C_s V_{C_s}$$

【波形】

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin \omega t \\ &= v_{R_s}(t) + v_{C_s}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \phi) \\ &= i_{R_s}(t) = i_{C_s}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{R_s}(t) &= R_s i_{R_s}(t) \\ &= R_s i(t) = R_s I_m \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{R_s}(t) &= \frac{v_{R_s}(t)}{R_s} = \frac{V_m}{R_s} \sin(\omega t + \phi) \\ &= i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{C_s}(t) &= \frac{1}{C_s} \int i_{C_s}(t) dt \\ &= \frac{1}{C_s} \int i(t) dt = -\frac{I_m}{\omega C_s} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{C_s}(t) &= C_s \frac{dv_{C_s}(t)}{dt} \\ &= i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

• 回路 (b) の電圧・電流

【フェーザ】

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

$$I = YV = V \left[\frac{1}{R_p} + j\omega C_p \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

$$I_m = |Y|V_m = V_m \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C_p^2}$$

$$\tan \phi = \omega C_p R_p$$

$$V = V_{R_p} = V_{C_p}$$

$$I = I_{R_p} + I_{C_p}$$

$$V_{R_p} = R_p I_{R_p} \quad I_{R_p} = \frac{V_{R_p}}{R_p}$$

$$V_{C_p} = \frac{I_{L_p}}{j\omega C_p} \quad I_{L_p} = j\omega C_p V_{C_p}$$

【波形】

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin \omega t \\ &= v_{R_p}(t) = v_{C_p}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \phi) \\ &= i_{R_p}(t) + i_{C_p}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{R_p}(t) &= R_p i_{R_p}(t) \\ &= v(t) = V_m \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{R_p}(t) &= \frac{v_{R_p}(t)}{R_p} \\ &= \frac{v(t)}{R_p} = \frac{V_m}{R_p} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{C_p}(t) &= \frac{1}{C_p} \int i_{C_p} dt \\ &= v(t) = V_m \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{C_p}(t) &= C_p \frac{dv_{C_p}(t)}{dt} \\ &= C_p \frac{dv(t)}{dt} = \omega C_p V_m \cos \omega t \end{aligned}$$

• 抵抗の有効電力の等価性

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき,

R_s と R_p の電力 (有効電力) は同じ.

$$\frac{1}{2} R_s I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} \stackrel{\text{def}}{=} P_R$$

証明

R_s , R_p の複素電力を S_{R_s} , S_{R_p} とすると,*5

$$S_{R_s} = V_{R_s} I^* = R_s I I^* = R_s |I|^2 = \frac{1}{2} R_s I_m^2$$

$$S_{R_p} = V I_{R_p}^* = V \frac{V^*}{R_p} = \frac{|V|^2}{R_p} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p}$$

一方, 等価条件 [式 (11)] より,

$$R_p = \frac{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}{R_s}$$

I_m と V_m の関係式 [式 (12)] より,

$$I_m = |Y| V_m = \frac{V_m}{\sqrt{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}}$$

であるから,

$$\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} = \frac{1}{2} \frac{\left(R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}\right) I_m^2}{\frac{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}{R_s}} = \frac{1}{2} R_s I_m^2$$

よって, 回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき, R_s と R_p の複素電力 (有効電力) は等しい.

• 抵抗の電力波形

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき,

R_s と R_p の電力波形は, 位相以外は同じ.

$$p_{R_s}(t) = P_R [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \quad (13)$$

$$p_{R_p}(t) = P_R [1 - \cos 2\omega t] \quad (14)$$

$p_{R_s}(t)$ と $p_{R_p}(t)$ は, どちらも振動中心 (平均値) が P_R , 振幅が P_R , 周波数が 2ω の波形であり, 異なるのは位相だけ. 図 7 (a), (c) はその具体例.

証明

R_s , R_p の電力波形を $p_{R_s}(t)$, $p_{R_p}(t)$ とすると,

$$\begin{aligned} p_{R_s}(t) &= v_{R_s}(t) i(t) = [R_s i(t)] i(t) = R_s i(t)^2 \\ &= R_s I_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} R_s I_m^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= P_R [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{R_p}(t) &= v(t) i_{R_p}(t) = v(t) \left[\frac{v(t)}{R_p} \right] = \frac{v(t)^2}{R_p} \\ &= \frac{V_m^2}{R_p} \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_p} [1 - \cos 2\omega t] \\ &= P_R [1 - \cos 2\omega t] \end{aligned}$$

*5 電力を計算する素子が抵抗だけなので, 複素電力を計算しても実部 (有効電力) だけとなる.

• 抵抗の消費エネルギーの等価性

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき,

R_s と R_p の一周期の消費エネルギーは同じ.

$$W_{R_s} = W_{R_p} = P_R T = P_R \frac{2\pi}{\omega}$$

証明

抵抗の一周期の消費エネルギーは、抵抗の電力の一周期の時間積分である。 R_s , R_p の電力は、式 (13), 式 (14) より、どちらも平均値が P_R の正弦波である。したがって、それらの一周期の積分値を W_{R_s} , W_{R_p} とし、一周期を $T = 2\pi/\omega$ とすると、どちらも $P_R T$ となる。図 7 (b), (d) はその具体例.

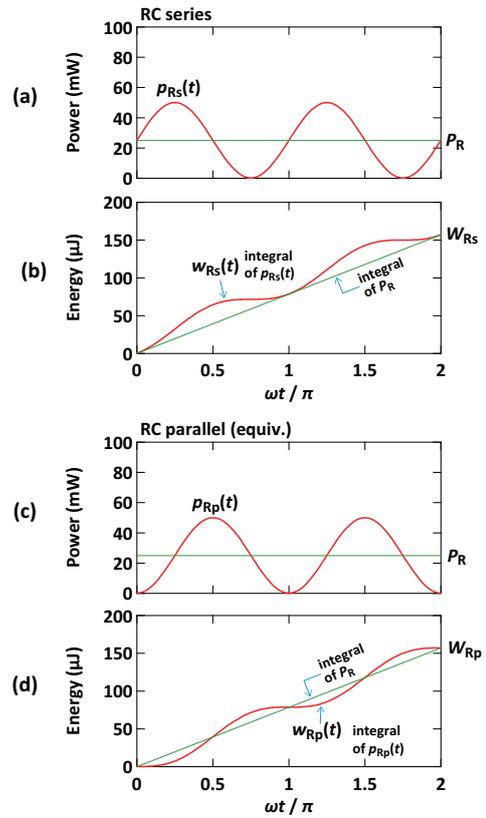


図 7 RC 直列回路 [回路 (a)] の R_s の電力波形 (a) とエネルギー波形 (b). それと等価な並列回路 [回路 (c)] の R_p の電力波形 (c) とエネルギー波形 (d).

• コンデンサの無効電力の等価性

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

C_s と C_p の電力（無効電力）は同じ。

$$\frac{1}{2} \omega C_p V_m^2 = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C_s} \stackrel{\text{def}}{=} P_C$$

証明

C_s , C_p の複素電力を S_{C_s} , S_{C_p} とすると,*6

$$\begin{aligned} S_{C_s} &= V_{C_s} I^* = \frac{I}{j\omega C_s} I^* = -j \frac{|I|^2}{\omega C_s} \\ &= -j \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C_s} \\ S_{C_p} &= V I_{C_p}^* = V (j\omega C_p V)^* = -j\omega C_p |V|^2 \\ &= -j \frac{1}{2} \omega C_p V_m^2 \end{aligned}$$

一方、等価条件 [式 (11)] より、

$$\omega C_p = \frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}$$

また、電流と電圧の関係式 [式 (12)] より、

$$I_m^2 = |Y|^2 V_m^2 = \frac{V_m^2}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}}$$

よって、

$$\frac{1}{2} \omega C_p V_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} V_m^2 = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C_s}$$

よって、回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、 L_s と L_p の複素電力（無効電力）は等しい。

• コンデンサの電力波形

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

C_s と C_p の電力波形は、位相以外は同じ。

$$p_{C_s}(t) = -P_C \sin(2\omega t + 2\phi) \quad (15)$$

$$p_{C_p}(t) = P_C \sin 2\omega t \quad (16)$$

これらは、どちらも振動中心が 0（平均値がゼロ⇒無効電力）、振幅が P_C 、周波数が 2ω の波形であり、異なるのは位相だけ、ということがわかる。図 8 (a), (c) はその具体例。

証明

$C_s(t)$, $C_p(t)$ の電力波形を $p_{C_s}(t)$, $p_{C_p}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} p_{C_s}(t) &= v_{C_s} i(t) = \left[\frac{1}{C} \int i(t) dt \right] i(t) \\ &= -\frac{I_m^2}{\omega C_s} \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C_s} \sin(2\omega t + 2\phi) \\ &= -P_C \sin(2\omega t + 2\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{C_p}(t) &= v(t) i_{C_p}(t) = v(t) \left[C_p \frac{dv(t)}{dt} \right] \\ &= \omega C_p V_m^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ &= \frac{1}{2} \omega C_p V_m^2 \sin 2\omega t \\ &= P_C \sin 2\omega t \end{aligned}$$

*6 電力を計算する素子がコンデンサだけなので、複素電力を計算しても、虚部（無効電力）だけとなる。

• コンデンサの最大保持エネルギーの等価性

図 5 の回路 (a) と回路 (b) が等価であるとき、

C_s と C_p の最大保持エネルギーは同じ.

$$W_{Cs(\max)} = W_{Cp(\max)} = \frac{P_C}{\omega}$$

証明

C_s に保持されるエネルギー $w_{Cs}(t)$ は、式 (15) で与えられる電力 $p_{Cs}(t)$ の積分値である.

$$\begin{aligned} w_{Cs}(t) &= \int p_{Cs}(t) dt = -P_C \int \sin(2\omega t + 2\phi) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega} \cos(2\omega t + 2\phi) + K_{Cs} \end{aligned}$$

コンデンサが保持するエネルギーは、コンデンサの電圧がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} v_{Cs}(t) = 0 &\Rightarrow \cos(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \\ \omega t + \phi &= \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow 2\omega t + 2\phi = \pi + 2n\pi \Rightarrow \\ \cos(2\omega t + 2\phi) &= -1 \text{ のときに } w_{Cs}(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_{Cs} = \frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_{Cs}(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= \frac{P_C}{\omega} \cos^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

C_p に保持されるエネルギー $w_{Cp}(t)$ は、式 (16) で与えられる電力 $p_{Cp}(t)$ の積分値である.

$$\begin{aligned} w_{Cp}(t) &= \int p_{Cp}(t) dt = P_C \int \sin 2\omega t dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega} \cos 2\omega t + K_{Cp} \end{aligned}$$

コンデンサが保持するエネルギーは、コンデンサの電圧がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} v(t) = 0 &\Rightarrow \sin \omega t = 0 \Rightarrow \\ \omega t = n\pi &\Rightarrow 2\omega t = 2n\pi \Rightarrow \\ \cos 2\omega t &= 1 \text{ のときに } w_{Cp}(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_{Cp} = \frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_{Cp}(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_C}{\omega} [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \\ &= \frac{P_C}{\omega} \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

以上より、 $w_{Cs}(t)$ 、 $w_{Cp}(t)$ の最大値 $W_{Cs(\max)}$ 、 $W_{Cp(\max)}$ は、

$$W_{Cs(\max)} = W_{Cp(\max)} = \frac{P_C}{\omega}$$

図 8 (b), (d) はその具体例.

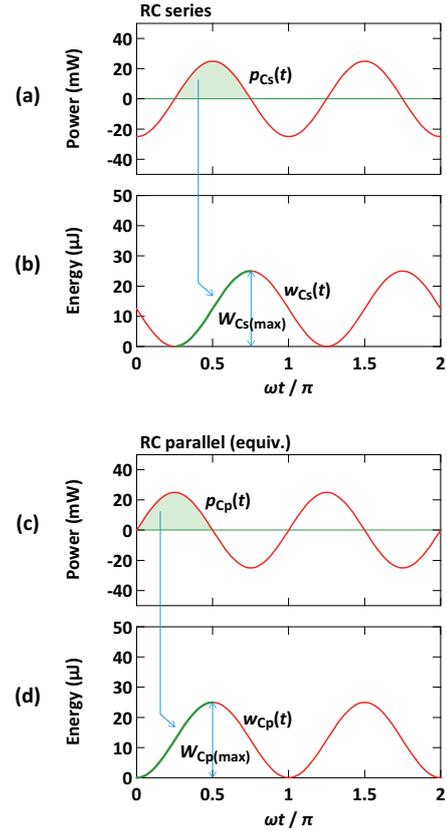


図 8 RC 直列回路 [回路 (a)] の C_s の電力波形 (a) とエネルギー波形 (b). それと等価な並列回路 [回路 (b)] の C_p の電力波形 (c) とエネルギー波形 (d).