

豆知識

コイルに蓄積されるエネルギー

エネルギー方式 Q 値を求めるときに必要となるコイルに蓄積されるエネルギー $w_L = w_L(t)$ は、次式で与えられる。

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2$$

ここで、 L はコイルのインダクタンス、 $i = i(t)$ はコイルに流れる電流である。この導出過程を失念してしまった人は、以下にて復習されたし。

エネルギー = 電力 × 時間より、

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_0^t v(\tau) i(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t L \frac{di(\tau)}{d\tau} i(\tau) d\tau \\ &= L \int_0^{i(t)} i(\tau) di(\tau) \\ &= \frac{1}{2} L i(t)^2 \end{aligned}$$

ただし、 $i(0) = 0$ とした。

$i(t) = I_m \sin \omega t$ の場合は、

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t$$

もう少し物理的な理解

コイルでは、電流の時間変化によって次式の起電力 $v = v(t)$ が発生する。

$$v = L \frac{di}{dt}$$

このとき、 dt という時間の間にコイルの中を移動した電荷量を dq とすると、 $dq = i dt$ である。このときの仕事量（つまりエネルギー）は、以下に示した電位差 v の意味から導出される。

「2点間の電位差が v である」とは？

単位電荷を電極間の電場の力（クーロン力）に逆らって、片方の電極からもう片方の電極まで動かしたときの仕事量が v である。

これより、 dq の電荷を電位差 v のコイルの端から端まで動かしたときの仕事量 dw_L は、次式で表される。

$$dw_L = v dq = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$$

したがって、電流 i が 0 から i_{final} まで変化したときの仕事量（エネルギー） w_L は次式で与えられる。

$$w_L = L \int_0^{i_{\text{final}}} i di = \frac{1}{2} L i_{\text{final}}^2$$

ここで、終状態の電流を改めて i と書けば、

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2$$

と書ける。

豆知識

コンデンサに蓄積されるエネルギー

エネルギー方式の Q 値を求めるときに必要となるコンデンサに蓄積されるエネルギー $w = w_C(t)$ は次式で与えられる。

$$w_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C v^2$$

ここで、 C はコンデンサのキャパシタンス、 $q = q(t)$ は蓄積された電荷量、 $v = v(t)$ はコンデンサの電圧である。この導出過程を失念してしまった人は、以下にて復習されたし。

エネルギー = 電力 × 時間より、

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int_0^t v(\tau) i(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t v(\tau) C \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= C \int_0^{v(t)} v(\tau) dv(\tau) \\ &= \frac{1}{2} C v(t)^2 \end{aligned}$$

ただし、 $v(0) = 0$ とした。

$v(t) = V_m \sin \omega t$ の場合は、

$$w_C = \frac{1}{2} C V_m^2 \sin^2 \omega t$$

もう少し物理的な理解

コンデンサでは、蓄積電荷 $q = q(t)$ によって次式の電圧 $v(t)$ が発生する。

$$q = C v \quad \text{または} \quad v = \frac{q}{C}$$

このとき、 $-q$ を持つ電極から q を持つ電極に dq だけ電荷を移動させると、そのコンデンサの蓄積電荷は $q + dq$ となる。このときの仕事量（つまりエネルギー）は、電位差 v の意味から導出される。

「2点間の電位差が v である」とは？

単位電荷を電極間の電場の力（クーロン力）に逆らって、片方の電極からもう片方の電極まで動かしたときの仕事量が v である。

これより、 dq の電荷を電位差 v のコンデンサの片方の電極からもう片方の電極に動かしたときの仕事量 dw_C は、次式で表される。

$$dw_C = v dq = \frac{q}{C} dq$$

したがって、電荷量 q が 0 から q_{final} まで変化したときの仕事量（エネルギー） w_C は、次式で与えられる。

$$w_C = \frac{1}{C} \int_0^{q_{\text{final}}} q dq = \frac{q_{\text{final}}^2}{2C}$$

ここで、終状態の電荷量を改めて q と書けば、

$$w_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C v^2$$

と書ける。ここで、 $q = C v$ を使った。