

豆知識

RC 並列 L 直列回路

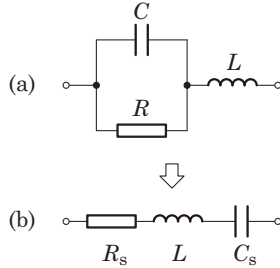


図 1 RC 並列 L 直列回路とその RLC 並列等価回路.

インピーダンス [回路 (a)]

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} + j\omega L \\
 &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} - \frac{j\omega C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} + j\omega L \\
 &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} + j\omega \left[L + \frac{C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

インピーダンス [回路 (b)]

$$Z = R_s + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_s}$$

共振条件と共振周波数

$$\begin{aligned}
 \text{Im}[Z(\omega_0)] = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2 &= \frac{C}{L} \\
 \omega_0 &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{C^2 R^2}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{共振の必要条件 } R^2 > \frac{L}{C}$$

等価な RLC 直列回路

$$\begin{aligned}
 R_s &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} = \frac{1/R}{C/L} = \frac{L}{CR} \\
 \omega_0 C_s &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} = \frac{\omega_0 C}{C/L} = \omega_0 L
 \end{aligned}$$

共振時のインピーダンス

$$Z(\omega_0) = R_s = \frac{L}{CR} \quad (3)$$

Q 値 (エネルギー方式・等価回路方式・電力方式)

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{\omega_0 C_s R_s} = \omega_0 CR \\
 &= R \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} \quad \text{参考 } Q^2 = \frac{CR^2}{L} - 1 \quad (4)
 \end{aligned}$$

 $\Delta\omega$ (エネルギー方式・等価回路方式から逆算)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{CR}$$

半値幅方式の ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$)

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{2C^2 R^2} - \frac{1}{C^2 R^2} \sqrt{\frac{CR^2}{L} + \frac{9}{4}}} \\
 \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{2C^2 R^2} + \frac{1}{C^2 R^2} \sqrt{\frac{CR^2}{L} + \frac{9}{4}}}
 \end{aligned}$$

Q(エネルギー方式) > 10 であれば,

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{1}{CR}$$

インピーダンスの周波数特性

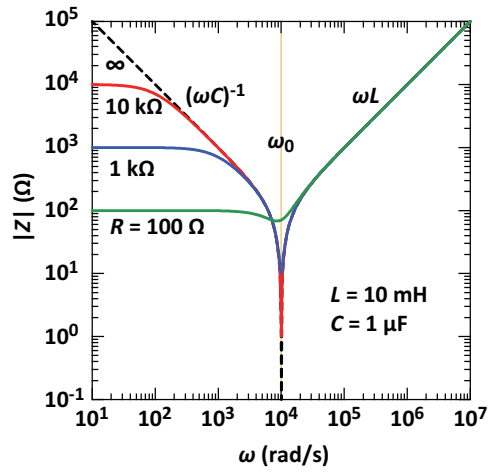
図 2 RC 並列 L 直列回路の Z の周波数特性.

表 1 共振周特性の数値例 ($L = 10 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ } \mu\text{F}$).
単位は, R (Ω), 角周波数 (rad/s). 共振の必要条件は,
 $R > \sqrt{L/C} = 100 \text{ } \Omega$.

R	∞	10 k	1 k	500	100
$R > \sqrt{L/C}$	yes	yes	yes	yes	no
ω_0	10000	10000	9950	9798	∞
ω_1	10000	9950	9507	9007	n/a
ω_2	10000	10050	10517	11085	18174
$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$	0	100	1010	2078	n/a
$\Delta\omega_{\text{ene}}$	0	100	1000	2083	n/a
Q_{ene}	∞	100	9.95	4.90	n/a
Q_{FWHM}	∞	100	9.85	4.71	n/a

課題 RC 並列 L 直列回路の Q 値 (エネルギー方式)

図 3 に示した RC 並列 L 直列回路の Q 値が次式で与えられることを, エネルギー方式の Q 値の定義に基づいて求めよ.

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}}$$

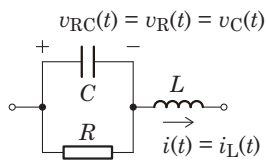


図 3 RC 並列 L 直列回路.

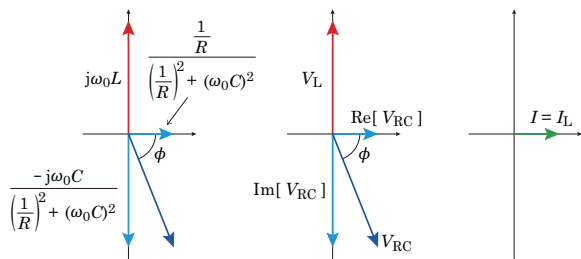


図 4 RC 並列 L 直列回路のインピーダンスとフェーザダイアグラム.

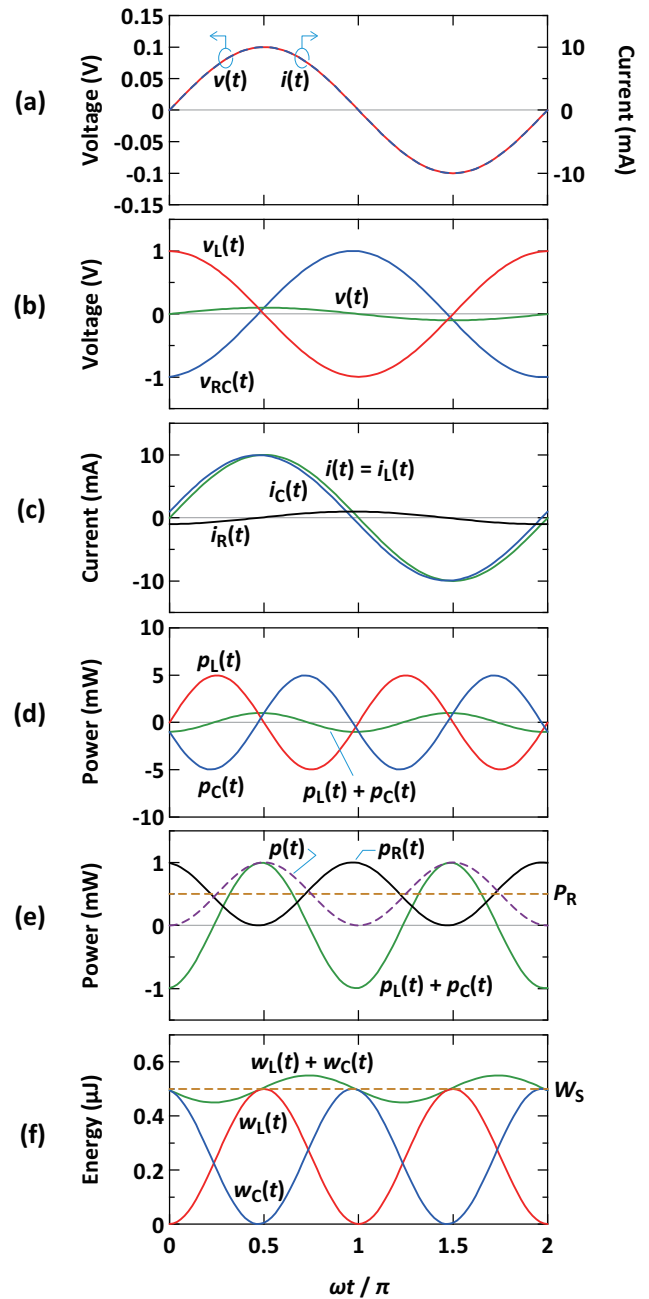


図 5 RC 並列 L 直列回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形.

略解

【共振時の端子間電流】

$$i(t) = I_m \sin \omega_0 t$$

【共振時の各素子の電流・電圧】

$$i_L(t) = i(t) = I_m \sin \omega_0 t$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \omega_0 L I_m \cos \omega_0 t$$

$$i_{RC}(t) = i(t) = I_m \sin \omega_0 t$$

$$v_{RC}(t) = V_{RCm} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_C(t) = v_{RC}(t) = V_{RCm} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_{RC}(t)}{dt} = \omega_0 C V_{RCm} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_R(t) = v_{RC}(t) = V_{RCm} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_{RCm}}{R} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

【 V_{RCm} と ϕ 】

V_{RCm} と ϕ は、与えられたパラメータで表す必要がある。これらは、フェーザを用いた以下の計算で求められる。

$$I \quad i(t) \text{ のフェーザ } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0$$

$$V_{RC} \quad v_{RC}(t) \text{ のフェーザ } V_{RC} = \frac{V_{RCm}}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

$$Z_{RC} \quad R \text{ と } C \text{ の並列回路のインピーダンス}$$

とすると、

$$V_{RC} = Z_{RC} I \quad Z_{RC} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega_0 C}$$

よって

$$V_{RCm} = |Z_{RC}| I_m = \frac{I_m}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2}} \quad (5)$$

$$\tan \phi = -\frac{\omega_0 C}{1/R} = -\omega_0 C R$$

【共振時に成り立つ関係】

端子間のインピーダンスは、

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega_0 C} + j\omega_0 L \\ &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} - \frac{j\omega_0 C}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} + j\omega_0 L \\ &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} + j \left[\omega_0 L - \frac{\omega_0 C}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} \right] \end{aligned}$$

共振時に $\text{Im}[Z] = 0$ であるから、

$$\omega_0 L = \frac{\omega_0 C}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} \quad \therefore \frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2 = \frac{C}{L}$$

これより、式(5)の V_{RCm} と I_m の関係は、以下のように書き換えられる。

$$V_{RCm} = \frac{I_m}{\sqrt{C/L}} \quad \therefore C V_{RCm}^2 = L I_m^2$$

以下の電力計算では、上式から導かれる次式を使う。

$$P_X = \frac{1}{2} \omega_0 L I_m^2 = \frac{1}{2} \omega_0 C V_{RCm}^2$$

【 L と C の無効電力】

$$\begin{aligned} p_L(t) &= v_L(t) i_L(t) \\ &= \omega_0 L I_m^2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= \omega_0 L I_m^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t \\ &= P_X \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C(t) &= v_C(t) i_C(t) \\ &= \omega_0 C V_{RCm}^2 \sin(\omega_0 t + \phi) \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= \omega_0 C V_{RCm}^2 \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\phi) \\ &= P_X \sin(2\omega_0 t + 2\phi) \end{aligned}$$

【 L が保持するエネルギーの瞬時値 $w_L(t)$ 】

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int p_L(t) dt = P_X \int \sin 2\omega_0 t dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \cos 2\omega_0 t + K_L \end{aligned}$$

L が保持するエネルギーは、 L の電流がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} i_L(t) = 0 &\Rightarrow \sin \omega_0 t = 0 \Rightarrow \\ \omega_0 t = n\pi &\Rightarrow 2\omega_0 t = 2n\pi \Rightarrow \\ \cos 2\omega_0 t = 1 &\text{のときに } w_L(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_L = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} [1 - \cos 2\omega_0 t] \\ &= \frac{P_X}{\omega_0} \sin^2 \omega_0 t \end{aligned}$$

【 C が保持するエネルギーの瞬時値 $w_C(t)$ 】

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int p_C(t) dt = P_X \int \sin(2\omega_0 t + 2\phi) dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \cos(2\omega_0 t + 2\phi) + K_C \end{aligned}$$

C が保持するエネルギーは、 C の電圧がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} v_C(t) = 0 &\Rightarrow \sin(\omega_0 t + \phi) = 0 \Rightarrow \\ \omega_0 t + \phi = n\pi &\Rightarrow 2\omega_0 t + 2\phi = 2n\pi \Rightarrow \\ \cos(2\omega_0 t + 2\phi) = 1 &\text{のときに } w_C(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_C = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\phi)] \\ &= \frac{P_X}{\omega_0} \sin^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

【回路が保持するエネルギーの瞬時値 $w_S(t)$ 】*1

$$\begin{aligned} w_S(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{P_X}{\omega_0} [\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2 \omega_0 t] \\ &= \frac{P_X}{\omega_0} [1 - \cos \phi \cos 2\omega_0 t] \end{aligned}$$

- 第1項 $\frac{P_X}{\omega_0}$ は定数であり、回路が定常的に保持しているエネルギーである。
- 第2項 $\frac{P_X}{\omega_0} \cos \phi \cos(2\omega_0 t + \phi)$ はゼロを中心として正負に振動する正弦波であり、電源との間で往復するエネルギーである。つまり、定常的に回路が保持しているエネルギーではない。

【回路が定常的に保持するエネルギー W_S 】

$$\begin{aligned} W_S &= \frac{P_X}{\omega_0} \\ &= \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C V_{RCm}^2 \end{aligned}$$

なお、これより、

$$W_S = \max[w_L(t)] = \max[w_C(t)]$$

ということがわかる。

*1 ここでの式変形については、豆知識「位相差のある二つの正弦波の二乗の和」を参照されたし。

【 R の有効電力】

$$\begin{aligned} p_R(t) &= v_R(t) i_R(t) \\ &= \frac{V_{RCm}^2}{R} \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

【 R の一周期の平均電力 P_R 】

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p_R(t) dt \\ &= \frac{V_{RCm}^2}{R} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{RCm}^2}{R} \end{aligned}$$

【 R で一周期に消費されるエネルギー W_D 】

$$W_D = P_R T_0 = \frac{1}{2} \frac{V_{RCm}^2}{R} \frac{2\pi}{\omega_0}$$

【 Q 値】

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_S}{W_D} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_{RCm}^2}{\frac{1}{2} \frac{V_{RCm}^2}{R} \frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= \omega_0 C R = R \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} \end{aligned}$$

課題 RC 並列 L 直列回路の Q 値 (直列への変換)

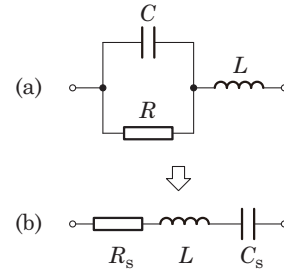


図 6 RC 並列 L 直列回路と等価な RLC 並列回路.

図 6 (a) の RC 並列 L 直列回路の場合には、図 6 (b) のように、並列接続された R と C を直列接続の R_s と C_s に変換することで、RLC 直列回路に帰着できる。したがって、RLC 直列回路の Q 値の公式より

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{\omega_0 C_s R_s} = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{L}{C_s}} \quad (6)$$

となる。これがエネルギー方式で得られる Q 値の式と一致することを示せ。

略解

R_s と C_s は、図 6 の二つの回路のインピーダンスが等しい、ということから求められる。

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} + j\omega L \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} + j\omega L - \frac{j\omega C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \\ Z_b &= R_s + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \end{aligned} \quad (7)$$

であるから、 R_s と ωC_s は以下の通りとなる。

$$R_s = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad \omega C_s = \frac{\omega C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$$

次に、これらが Q 値を求めるときの角周波数、つまり共振角周波数 ω_0 においてどうなるのかを調べよう。式 (7) の虚部 = 0 より、

$$L = \frac{C}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} \quad \therefore \frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2 = \frac{C}{L} \quad (8)$$

$$\therefore \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{C^2 R^2}} \quad (9)$$

となる。これより、共振時の R_s と C_s は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} = \frac{1}{C/L} = \frac{L}{CR} \\ \frac{1}{\omega_0 C_s} &= \frac{\omega_0 C}{\frac{1}{R^2} + \omega_0^2 C^2} = \frac{\omega_0 C}{C/L} = \omega_0 L \end{aligned}$$

ここで、 ω_0 を求める途中の式 (8) を用いた。

得られた R_s と C_s を式 (6) に代入し、式 (9) も用いると、 R 、 L 、 C を用いた Q 値の表式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{\omega_0 C_s R_s} = \frac{\omega_0 L}{\frac{L}{CR}} = \omega_0 CR \\ &= R \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} \end{aligned}$$

この Q 値の表式は、エネルギー方式で求めた場合の表式を一致している。

課題 等価変換で求めた Q 値の妥当性

前課題の等価変換で Q 値を求めることの妥当性を検討せよ。

略解

抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後において以下が成り立つからである。^{*2}

- 抵抗での有効電力は同じ。
- リアクタンスでの無効電力は同じ。
- 抵抗での一周期の消費エネルギーは同じ。
- リアクタンスの最大保持エネルギーは同じ。

^{*2} 抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後における各回路素子の電力波形・エネルギー波形の詳細については、「直列と並列の等価変換 (R と L)」、「直列と並列の等価変換 (R と C)」を参照されたし。

課題 RC 並列 L 直列回路の Q 値 (半値幅方式)

図 3 に示した RC 並列 L 直列回路の Q 値を、半値幅方式の Q 値の定義に基づいて求めよ。

略解

半値幅方式の Q 値の定義式は次式である。

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (10)$$

分子の ω_0 は式 (2) で与えられる。一方、分母の $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ における ω_1 と ω_2 は

$$|Z| = \sqrt{2} |Z(\omega_0)|$$

となる ω である。RC 並列 L 直列回路の Z は式 (1) で与えられ、 $Z(\omega_0)$ は式 (3) で与えられる。したがって、次式を解く必要がある。

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}\right)^2 + \left(\omega L - \frac{\omega C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \frac{L}{CR} \end{aligned}$$

これを満たし、 $0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ となる ω_1 , ω_2 を求めるのはかなり面倒であるが、以下のような解が得られる。^{*3}

$$\frac{\omega_1[-]}{\omega_2[+]} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{2C^2R^2} \mp \frac{1}{C^2R^2} \sqrt{\frac{CR^2}{L} + \frac{9}{4}}} \quad (11)$$

この解の式から、半値幅方式で得られる Q 値の表式がエネルギー方式で得られる Q 値の式 [式 (4)] と一致しないことがわかる。

ただし、回路の Q 値がある程度大きい場合には、式 (11) から得られる $\Delta\omega$ が、エネルギー方式の Q 値を式 (10) に代入して得られる $\Delta\omega$ と近似的に等しくなる。つまり、Q 値がある程度大きい場合には、エネルギー方式と半値幅方式の Q 値は近似的に一致する。以下では、そのことを示す。

まず、

$$k = \frac{1}{CR}$$

とする。さらに、式 (2) と式 (4) を用いると、式 (11) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\omega_1[-]}{\omega_2[+]} = \sqrt{\omega_0^2 + k^2 \left(\frac{3}{2} \mp \sqrt{Q^2 + 1 + \frac{9}{4}}\right)} \quad (12)$$

ここで、Q はエネルギー方式の Q 値である。 $1 \ll Q$ である場合には、以下のような近似が成り立つ。

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{Q^2 + 1 + \frac{9}{4}} \approx \frac{3}{2} \pm Q \approx \pm Q$$

この近似を式 (12) に適用し、式 (4) より

$$Q = \omega_0 CR = \omega_0 \frac{1}{k} \quad \therefore k^2 Q = \frac{k^2 Q^2}{Q} = \frac{\omega_0^2}{Q}$$

であることを用いると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1[-]}{\omega_2[+]} &= \sqrt{\omega_0^2 \mp k^2 Q} = \omega_0 \sqrt{1 \mp \frac{1}{Q}} \\ &\approx \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q}\right) = \omega_0 \mp \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 \mp \frac{1}{2} k \end{aligned}$$

最後の式変形では、 $1 \ll Q$ であることを用いて、テーラー展開の第 2 項までの近似を行った。これより、

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx k = \frac{1}{CR}$$

となる。つまり、Q 値が十分に大きい場合には、エネルギー方式で得られた Q 値から逆算した $\Delta\omega$ と半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ は近似的に一致する。以下では、この近似の程度を数値計算によって確認する。

^{*3} Wolfram alpha の助けを借りる。

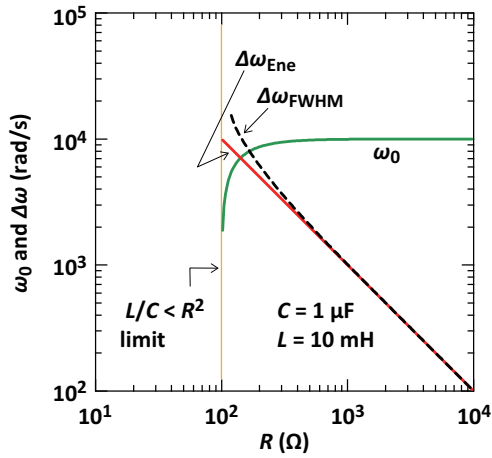


図 7 RC 並列 L 直列回路の $\Delta\omega$ の定義式依存性.

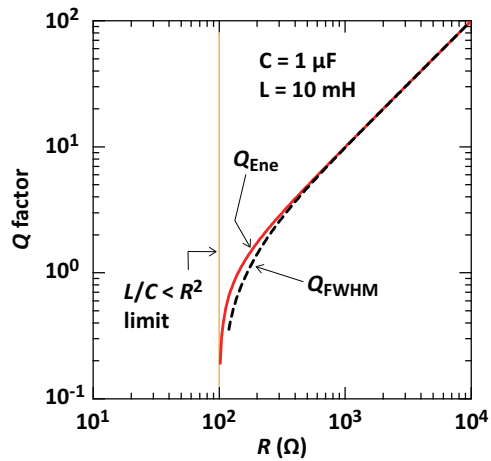


図 8 RC 並列 L 直列回路の Q 値の定義式依存性.

図 7 は、 ω_0 、半値幅方式の $\Delta\omega$ 、エネルギー方式の $\Delta\omega$ を $C = 1 \mu\text{F}$ 、 $L = 10 \text{ mH}$ 、 $R = 10 \sim 10^4 \Omega$ として計算した結果である。この図から、 $100 \Omega < R$ （つまり、 $10 < Q$ ）であれば、エネルギー方式の Q 値から逆算した $\Delta\omega$ が、半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ の良い近似になっていることがわかる。

図 8 は、半値幅方式とエネルギー方式の Q 値を $C = 1 \mu\text{F}$ 、 $L = 10 \text{ mH}$ 、 $R = 10 \sim 10^4 \Omega$ として計算した結果である。この図から、 $100 \Omega < R$ （つまり、 $10 < Q$ ）であれば、エネルギー方式の Q 値が、半値幅方式で得られる Q 値のよい近似になっていることがわかる。