豆知識

RC 直列 L 並列回路の共振回路

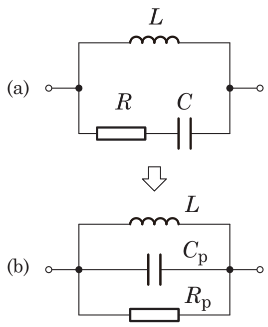

図 1 RC 直列 L 並列回路と等価な RLC 並列回路.

アドミタンス［回路 (a)］

$$Y = \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} + \frac{\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left[\frac{\frac{1}{C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{1}{L}\right] \tag{1}$$

アドミタンス［回路 (b)］

$$Y = \frac{1}{R_\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p}$$

共振条件と共振角周波数

$$\mathrm{Im}[Y(\omega_0)] = 0 \quad \therefore \quad R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} = \frac{L}{C}$$

$$\frac{1}{\omega_0} = C\sqrt{\frac{L}{C} - R^2} = \sqrt{LC - C^2R^2} \tag{2}$$

共振の必要条件 $R^2 < \frac{L}{C}$ または $1 < \frac{L}{CR^2}$

共振時の等価な RLC 並列回路

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} = \frac{R}{L/C} = \frac{CR}{L}$$

$$\omega C_\mathrm{p} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{L/C} = \frac{1}{\omega_0 L}$$

共振時のアドミタンス

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{CR}{L} \tag{3}$$

Q 値（エネルギー方式・等価回路方式・電力方式）

$$Q = \omega_0 C_\mathrm{p} R_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{p}}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

$$= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2} \qquad \text{参考} \quad Q^2 = \frac{L}{CR^2} - 1 \tag{4}$$

$\Delta\omega$（エネルギー方式の Q 値からの逆算）

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0^2 CR} = \frac{L}{R} - CR$$

半値幅方式の ω_1，ω_2，$\Delta\omega$，Q 値

$$\omega_1^{-1} = \sqrt{LC + \frac{C^2R^2}{2} + C^2R^2\sqrt{\frac{L}{CR^2} + \frac{9}{4}}}$$

$$\omega_2^{-1} = \sqrt{LC + \frac{C^2R^2}{2} - C^2R^2\sqrt{\frac{L}{CR^2} + \frac{9}{4}}}$$

Q(エネルギー方式) > 10 であれば，

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{L}{R} - CR$$

$$Q_\mathrm{FWHM} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx Q(\text{エネルギー方式})$$

アドミタンスの周波数特性

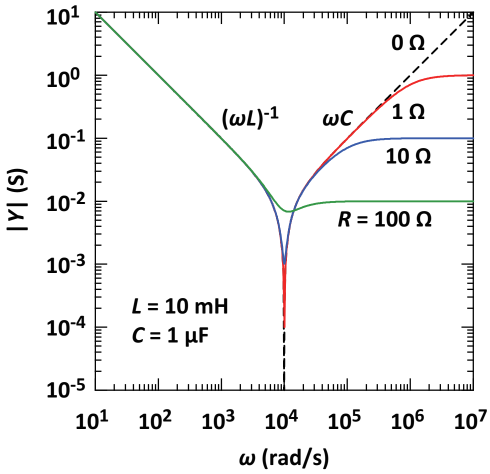

図 2 RC 直列 L 並列回路のアドミタンスの周波数特性.

表 1 共振周特性の R 依存性の数値例 ($L = 10$ mH, $C = 1$ μF). 単位は, R (Ω), 角周波数 (rad/s). 共振の必要条件は, $R < \sqrt{L/C} = 100$ Ω.

R	0	1	10	50	100
$R < \sqrt{L/C}$	yes	yes	yes	yes	no
ω_0	10000	10001	10050	11547	0
ω_1	10000	9950	9530	7845	n/a
ω_2	10000	10050	10548	16330	18174
$\Delta\omega_{\mathrm{FWHM}}$	0	100	1018	8485	n/a
$\Delta\omega_{\mathrm{ene}}$	0	100	1010	6667	10000
Q_{ene}	∞	100	9.95	1.73	0
Q_{FWHM}	∞	100	9.88	1.36	n/a

課題　RC 直列 L 並列回路の Q 値（エネルギー方式）

図 3 に示した RC 直列 L 並列回路の Q 値が次式で与えられることを，エネルギー方式の Q 値の定義に基づいて示せ．

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2}$$

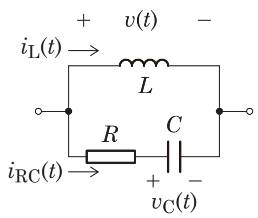

図 3 RC 直列 L 並列回路．

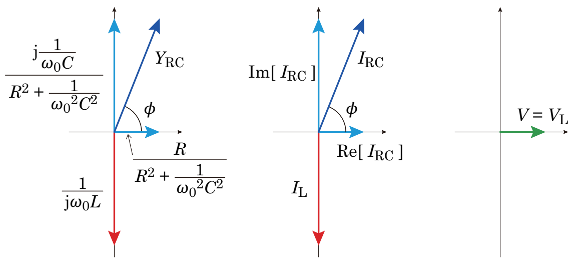

図 4 RC 直列 L 並列回路のアドミタンスとフェーザダイヤグラム．

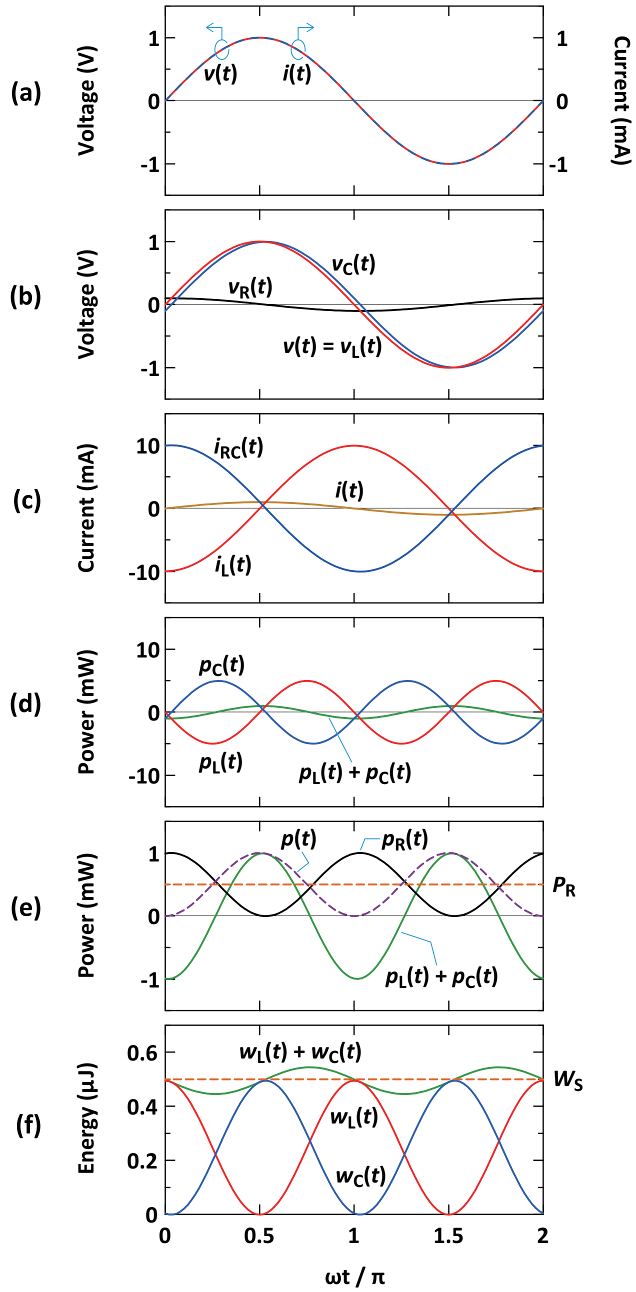

図 5 RC 直列 L 並列回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形．

略解

【共振時の端子間電圧】

$$v(t) = V_\mathrm{m} \sin\omega_0 t$$

【共振時の各素子の電流・電圧】

$$v_\mathrm{L}(t) = v(t) = V_\mathrm{m}\sin\omega_0 t$$
$$i_\mathrm{L}(t) = \frac{1}{L}\int v_\mathrm{L}(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{V_\mathrm{m}}{\omega_0 L}\cos\omega_0 t$$

$$v_\mathrm{RC}(t) = v(t) = V_\mathrm{m}\sin\omega_0 t$$
$$i_\mathrm{RC}(t) = I_\mathrm{RCm}\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

$$i_\mathrm{C}(t) = i_\mathrm{RC}(t) = I_\mathrm{RCm}\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$$
$$v_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C}\int i_\mathrm{C}(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{I_\mathrm{RCm}}{\omega_0 C}\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

$$i_\mathrm{R}(t) = i_\mathrm{RC}(t) = I_\mathrm{RCm}\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$$
$$v_\mathrm{R}(t) = R\,i_\mathrm{R}(t) = R I_\mathrm{RCm}\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

【I_RCm と ϕ】

I_RCm と ϕ は，与えられたパラメータで表す必要がある．これらは，フェーザを用いた以下の計算で求められる．

V	$v(t)$ のフェーザ	$V = \dfrac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}\angle 0$
I_RC	$i_\mathrm{RC}(t)$ のフェーザ	$I_\mathrm{RC} = \dfrac{I_\mathrm{RCm}}{\sqrt{2}}\angle\phi$
Y_RC	R と C の直列回路のアドミタンス	

とすると，

$$I_\mathrm{RC} = Y_\mathrm{RC} V \qquad Y_\mathrm{RC} = \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}}$$

よって

$$I_\mathrm{RCm} = |Y_\mathrm{RC}|\ V_\mathrm{m} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}} \tag{5}$$

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

【共振時に成り立つ関係】

端子間のアドミタンスは，

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\\
&= \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 L} + \frac{\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C}}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}\\
&= \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} + \mathrm{j}\left[\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \frac{1}{\omega_0 L}\right]
\end{aligned}$$

共振時に $\mathrm{Im}[Y] = 0$ であるから，

$$\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} = \frac{1}{\omega_0 L} \quad \therefore\ R^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} = \frac{L}{C}$$

これより，式 (5) の I_RCm と V_m の関係は，以下のように書き換えられる．

$$I_\mathrm{RCm} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{L/C}} \quad \therefore\ \frac{V_\mathrm{m}^2}{L} = \frac{I_\mathrm{RCm}^2}{C}$$

以下の電力計算では，上式から導かれる次式を使う．

$$P_\mathrm{X} = \frac{1}{2}\frac{V_\mathrm{m}^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{2}\frac{I_\mathrm{RCm}^2}{\omega_0 C}$$

【L と C の無効電力】

$$\begin{aligned}
p_\mathrm{L}(t) &= v_\mathrm{L}(t)\ i_\mathrm{L}(t)\\
&= -\frac{V_\mathrm{m}^2}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\\
&= -\frac{V_\mathrm{m}^2}{\omega_0 L}\frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t\\
&= -P_\mathrm{X}\sin 2\omega_0 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_\mathrm{C}(t) &= v_\mathrm{C}(t)\ i_\mathrm{C}(t)\\
&= -\frac{I_\mathrm{RCm}^2}{\omega_0 C}\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)\\
&= -\frac{I_\mathrm{RCm}^2}{\omega_0 C}\frac{1}{2}\sin\left(2\omega_0 t + 2\phi\right)\\
&= -P_\mathrm{X}\sin\left(2\omega_0 t + 2\phi\right)
\end{aligned}$$

【L が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{L}}(t)$】

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{L}}(t) &= \int p_{\mathrm{L}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= P_{\mathrm{X}} \int (-\sin 2\omega_0 t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \cos 2\omega_0 t + K_{\mathrm{L}} \end{aligned}$$

L が保持するエネルギーは，L の電流がゼロのときにゼロであるから，

$$\begin{aligned} & i_{\mathrm{L}}(t) = 0 \ \Rightarrow\ \cos\omega_0 t = 0 \ \Rightarrow \\ & \omega_0 t = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow\ 2\omega_0 t = \pi + 2n\pi \ \Rightarrow \\ & \cos 2\omega_0 t = -1 \text{ のときに } w_{\mathrm{L}}(t) = 0 \\ & \therefore\ K_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{L}}(t) &= \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[1 + \cos 2\omega_0 t\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos^2 \omega_0 t \end{aligned}$$

【C が保持するのエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{C}}(t)$】

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{C}}(t) &= \int p_{\mathrm{C}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= P_{\mathrm{X}} \int (-\sin(2\omega_0 t + 2\phi))\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \cos(2\omega_0 t + 2\phi) + K_{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

C が保持するエネルギーは，C の電圧がゼロのときにゼロであるから，

$$\begin{aligned} & v_{\mathrm{C}}(t) = 0 \ \Rightarrow\ \cos(\omega_0 t + \phi) = 0 \ \Rightarrow \\ & \omega_0 t + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow\ 2\omega_0 t + 2\phi = \pi + 2n\pi \ \Rightarrow \\ & \cos(2\omega_0 t + 2\phi) = -1 \text{ のときに } w_{\mathrm{C}}(t) = 0 \\ & \therefore\ K_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{C}}(t) &= \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi)\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

【回路が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{S}}(t)$】[*1]

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{S}}(t) &= w_{\mathrm{L}}(t) + w_{\mathrm{C}}(t) \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\left[\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2 \omega_0 t\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\left[1 + \cos\phi \cos(2\omega_0 t + \phi)\right] \end{aligned}$$

- 第 1 項 $\dfrac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}$ は
  定数であり，回路が定常的に保持しているエネルギーである．
- 第 2 項 $\dfrac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\cos\phi\cos(2\omega_0 t + \phi)$ は
  ゼロを中心として正負に振動する正弦波であり，電源との間で往復するエネルギーである．つまり，定常的に回路が保持しているエネルギーではない．

【回路が定常的に保持しているエネルギー W_{S}】

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{S}} &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{2}\frac{I_{\mathrm{RCm}}^2}{\omega_0^2 C} \end{aligned}$$

なお，これより，

$$W_{\mathrm{S}} = \max\left[w_{\mathrm{L}}(t)\right] = \max\left[w_{\mathrm{C}}(t)\right]$$

ということがわかる．

[*1] 豆知識ここでの式変形については，「位相差のある二つの正弦波の二乗の和」を参照されたし．

【R の有効電力】

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{R}}(t) &= v_{\mathrm{R}}(t)\, i_{\mathrm{R}}(t) \\ &= R I_{\mathrm{RCm}}^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

【R の一周期の平均電力 P_{R}】

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R i_{\mathrm{R}}^2 \, \mathrm{d}t \\ &= R I_{\mathrm{RCm}}^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \phi) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} R I_{\mathrm{RCm}}^2 \end{aligned}$$

【R で一周期に消費されるエネルギー W_{D}】

$$W_{\mathrm{D}} = P_{\mathrm{R}}\, T_0 = \frac{1}{2} R I_{\mathrm{RCm}}^2 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

【Q 値】

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_{\mathrm{S}}}{W_{\mathrm{D}}} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \frac{I_{\mathrm{RCm}}^2}{\omega_0^2 C}}{\frac{1}{2} R I_{\mathrm{RCm}}^2 \frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - R^2} \end{aligned}$$

課題 RC 直列 L 並列回路の Q 値（並列への変換）

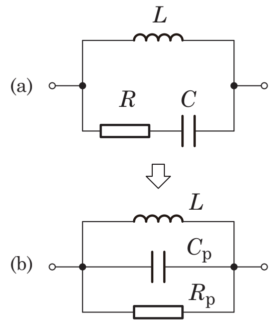

図 6 RC 直列 L 並列回路と等価な RLC 並列回路.

図 6 (a) の共振回路の場合には，**図 6** (b) のように，直列接続された R と C を並列接続の R_{p} と C_{p} に変換することで，RLC 並列回路に帰着できる．したがって，RLC 並列回路の Q 値の公式より，

$$Q = \omega_0 C_{\mathrm{p}} R_{\mathrm{p}} = \frac{R_{\mathrm{p}}}{\omega_0 L} = R_{\mathrm{p}} \sqrt{\frac{C_{\mathrm{p}}}{L}} \tag{6}$$

となる．これがエネルギー方式で得られる Q 値の式と一致することを示せ.

略解

R_p と C_p は，**図 1** の二つの回路のアドミタンスが等しい，ということから求められる．

$$
\begin{aligned}
Y_\mathrm{a} &= \frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \\
&= \frac{R}{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} + \frac{\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}} \qquad (7)\\
Y_\mathrm{b} &= \frac{1}{R_\mathrm{p}} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p}
\end{aligned}
$$

であるから，R_p と C_p は以下の通りとなる．

$$
\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{R}{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}} \qquad \omega C_\mathrm{p} = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}
$$

次に，これらが Q 値を求めるときの角周波数，つまり共振角周波数 ω_0 においてどうなるのかを調べよう．式 (7) の虚部 $=0$ より，

$$
\frac{1}{L} = \frac{\dfrac{1}{C}}{R^2+\dfrac{1}{\omega_0^2C^2}} \quad \therefore\ R^2+\frac{1}{\omega_0^2C^2} = \frac{L}{C} \qquad (8)
$$

$$
\therefore\ \frac{1}{\omega_0^2} = LC - C^2R^2
$$

$$
\therefore\ \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC-C^2R^2} = C\sqrt{\frac{L}{C}-R^2} \qquad (9)
$$

となる．これより，R_p と C_p は以下の通りとなる．

$$
\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{R}{R^2+\dfrac{1}{\omega_0^2C^2}} = \frac{R}{L/C} = \frac{CR}{L}
$$

$$
\omega_0 C_\mathrm{p} = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{R^2+\dfrac{1}{\omega_0^2C^2}} = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{L/C} = \frac{1}{\omega_0 L}
$$

ここで，ω_0 を求める途中の式 (8) を用いた．

得られた R_p と C_p を式 (6) に代入し，式 (9) も用いると，R，L，C を用いた Q 値の表式は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
Q &= \omega_0 C_\mathrm{p} R_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{p}}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 L}\frac{L}{CR} = \frac{1}{\omega_0 CR} \\
&= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}-R^2}
\end{aligned}
$$

この Q 値の表式は，RC 直列 L 並列回路の Q 値をエネルギー方式で求めた場合の表式を一致している．

課題　等価変換で求めた Q 値の妥当性

前課題の等価変換で Q 値を求めることの妥当性を検討せよ．

略解

抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後において以下が成り立つからである．[*2]

- 抵抗での有効電力は同じ．
- リアクタンスでの無効電力は同じ．

- 抵抗での一周期の消費エネルギーは同じ．
- リアクタンスの最大保持エネルギーは同じ．

[*2] 抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後における各回路素子の電力波形・エネルギー波形の詳細については，「直列と並列の等価変換（R と L）」，「直列と並列の等価変換（R と C）」を参照されたし．

課題 RC 直列 L 並列回路の Q 値（半値幅方式）

図 3 に示した RC 直列 L 並列回路の Q 値を，半値幅方式の Q 値の定義に基づいて求めよ．

略解

半値幅方式の Q 値の定義式は次式である．

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{10}$$

分子の ω_0 は式 (2) で与えられる．一方，分母の $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ における ω_1 と ω_2 は

$$|Y| = \sqrt{2}\,|Y(\omega_0)|$$

となる ω である．RC 直列 L 並列回路の Y は式 (1) で与えられ，$Y(\omega_0)$ は式 (3) で与えられる．したがって，次式を解く必要がある．

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left[\frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{1}{\omega L}\right]^2} \\ &= \frac{CR}{L}\sqrt{2} \end{aligned}$$

これを満たし，$0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ となる ω_1，ω_2 を求めるのはかなり面倒であるが，以下のような解が得られる．[*3]

$$\begin{matrix} \omega_1^{-1}[+] \\ \omega_2^{-1}[-] \end{matrix} = \sqrt{LC + \frac{C^2R^2}{2} \pm C^2R^2\sqrt{\frac{L}{CR^2} + \frac{9}{4}}} \tag{11}$$

この解の式から，半値幅方式で得られる Q 値の表式がエネルギー方式で得られる Q 値の式［式 (4)］と一致しないことがわかる．

ただし，回路の Q 値がある程度大きい場合には，式 (11) から得られる $\Delta\omega$ が，エネルギー方式の Q 値を式 (10) に代入して得られる $\Delta\omega$ と近似的に等しくなる．つまり，Q 値がある程度大きい場合には，エネルギー方式と半値幅方式の Q 値は近似的に一致する．以下では，そのことを示す．

まず，

$$k = CR$$

とする．さらに，式 (2) と式 (4) を用いると，式 (11) は以下のように書き換えられる．

$$\begin{matrix} \omega_1^{-1}[+] \\ \omega_2^{-1}[-] \end{matrix} = \sqrt{\omega_0^{-2} + k^2\left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{Q^2 + 1 + \frac{9}{4}}\right)} \tag{12}$$

ここで，Q はエネルギー方式の Q 値である．$1 \ll Q$ である場合には，以下のような近似が成り立つ．

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{Q^2 + 1 + \frac{9}{4}} \approx \frac{3}{2} \pm Q \approx \pm Q$$

この近似を式 (12) に適用すると，以下のようになる．

$$\begin{matrix} \omega_1^{-1}[-] \\ \omega_2^{-1}[+] \end{matrix} = \sqrt{\omega_0^{-2} \pm k^2 Q}$$

ここで，式 (4) より，

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{\omega_0 k} \quad \therefore \quad k^2 Q = \frac{k^2Q^2}{Q} = \frac{\omega_0^{-2}}{Q}$$

であることから，上式は以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \omega_1^{-1}[-] \\ \omega_2^{-1}[+] \end{matrix} &= \sqrt{\omega_0^{-2} \pm \frac{\omega_0^{-2}}{Q}} = \omega_0^{-1}\sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} \\ &\approx \omega_0^{-1}\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right) = \omega_0^{-1} \pm \frac{\omega_0^{-1}}{2Q} \\ &= \omega_0^{-1} \pm \frac{k}{2} \end{aligned}$$

最後の式変形では，$1 \ll Q$ であることを用いて，テーラー展開の第 2 項までの近似を行った．これより，

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} = k$$

となる．このままでは，$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ との関係がわからないが，$1 \ll Q$ のときに $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0$ であることを利用すると，

$$k = \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1\omega_2} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}$$

となる．これより，

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{k\omega_0^2} = \frac{LC - C^2R^2}{CR} = \frac{L}{R} - CR$$

となる．つまり，Q 値が十分に大きい場合には，エネルギー方式で得られた Q 値から逆算した $\Delta\omega$ と半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ は近似的に一致する．以下では，この近似の程度を数値計算によって確認する．

[*3] Wolfram alpha の助けを借りる．

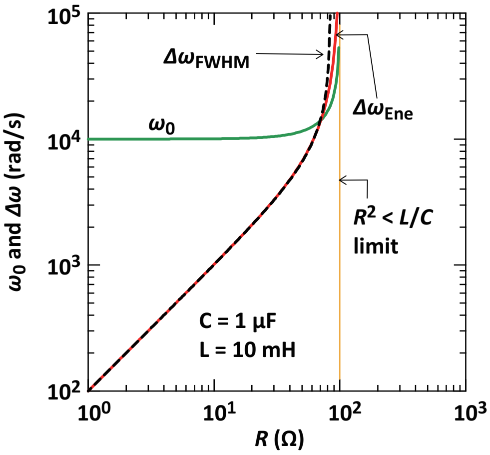

図 7 RC 直列 L 並列回路の $\Delta\omega$ の定義式依存性.

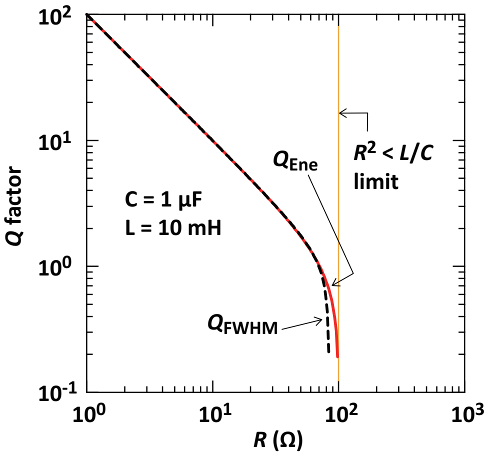

図 8 RC 直列 L 並列回路の Q 値の定義式依存性.

図 7 は，ω_0，半値幅方式の $\Delta\omega$，エネルギー方式の $\Delta\omega$ を $C = 1\ \mu\mathrm{F}$，$L = 10\ \mathrm{mH}$，$R = 1 \sim 10^3\ \Omega$ として計算した結果である．この図から，$R < 10\ \Omega$（つまり，$Q > 10$）であれば，エネルギー方式の Q 値から逆算した $\Delta\omega$ が，半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ の良い近似になっていることがわかる．

図 8 は，半値幅方式とエネルギー方式の Q 値を $C = 1\ \mu\mathrm{F}$，$L = 10\ \mathrm{mH}$，$R = 1 \sim 10^3\ \Omega$ として計算した結果である．この図から，$R < 10\ \Omega$（つまり，$Q > 10$）であれば，エネルギー方式の Q 値が，半値幅方式で得られる Q 値のよい近似になっていることがわかる．