

豆知識

RLC 並列回路

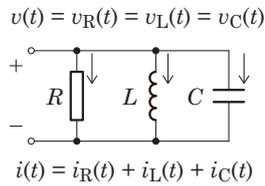


図 1 RLC 並列回路.

アドミタンス

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

共振条件と共振角周波数

$$\text{Im}[Y(\omega_0)] = 0 \quad \therefore \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \therefore \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

共振時のアドミタンス

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R}$$

Q 値 (エネルギー方式 = 半値幅方式)

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

 $\Delta\omega$ (エネルギー方式 = 半値幅方式)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{CR}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{CR}$$

半値幅方式の ω_1 , ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4C^2R^2}} - \frac{1}{2CR}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4C^2R^2}} + \frac{1}{2CR}$$

アドミタンスの周波数特性

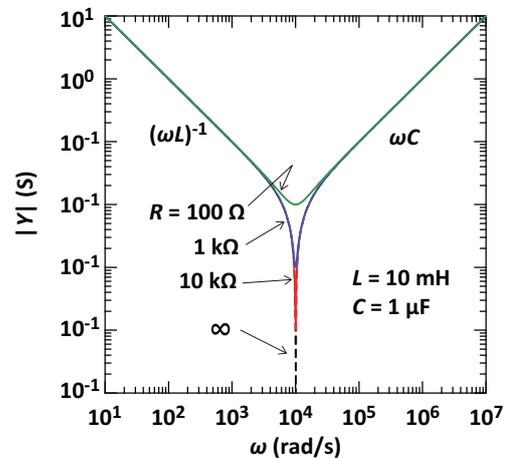


図 2 RLC 並列回路のアドミタンスの周波数特性.

表 1 RLC 並列回路の共振特性の数値例 ($L = 10$ mH, $C = 1$ μ F). 単位は, R (Ω), 角周波数 (rad/s).

(1)

R	∞	10 k	1 k	100
ω_0	10000	10000	10000	10000
ω_1	10000	9950	9513	6180
ω_2	10000	10050	10513	16180
$\Delta\omega_{\text{ene}}$	0	1000	1000	10000
$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$	0	1000	1000	10000
Q_{ene}	∞	100	10	1
Q_{FWHM}	∞	100	10	1

課題 RLC 並列回路の Q 値 (エネルギー方式)

図 1 に示した RLC 並列回路の Q 値を、エネルギー方式の Q 値の定義に基づいて求めよ.

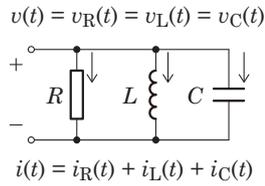


図 3 RLC 並列回路 (図 1 の再掲).

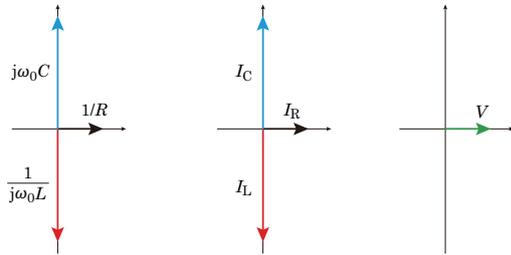


図 4 RLC 並列回路のアドミタンスとフェーザダイアグラム.

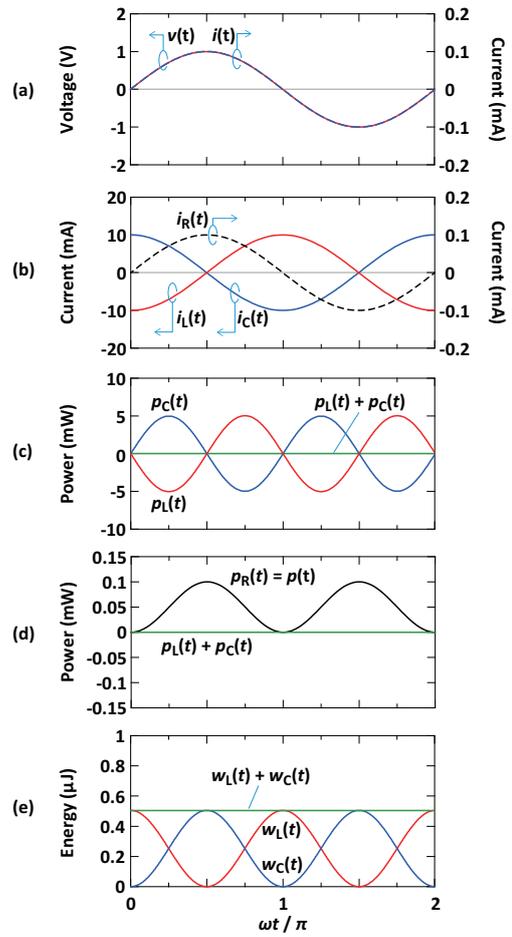


図 5 RLC 並列回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形.

略解

【共振時の端子間電圧】

$$v(t) = V_m \sin \omega_0 t$$

【共振時の各素子の電流・電圧】

$$v_L(t) = v(t) = V_m \sin \omega_0 t$$

$$i_L(t) = \int v_L(t) dt = -\frac{V_m}{\omega_0 L} \cos \omega_0 t$$

$$v_C(t) = v(t) = V_m \sin \omega_0 t$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \omega_0 C V_m \cos \omega_0 t$$

$$v_R(t) = v(t) = V_m \sin \omega_0 t$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \sin \omega_0 t$$

【共振時に成り立つ関係】

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \quad \text{より} \quad \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{2} \omega_0 C V_m^2$$

ここで、後の電力計算で使うために、

$$P_X = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{2} \omega_0 C V_m^2$$

とする。

【 L と C の無効電力】

$$\begin{aligned} p_L(t) &= v_L(t) i_L(t) \\ &= -\frac{V_m^2}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= -\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega_0 L} \sin 2\omega_0 t \\ &= -P_X \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C(t) &= v_C(t) i_C(t) \\ &= \omega_0 C V_m^2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} \omega_0 C V_m^2 \sin 2\omega_0 t \\ &= P_X \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

【 L が保持するエネルギーの瞬時値 $w_L(t)$ 】

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int p_L(t) dt = -P_X \int \sin 2\omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \cos 2\omega_0 t + K_L \end{aligned}$$

L が保持するエネルギーは、 L の電流がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} i_L(t) = 0 &\Rightarrow \cos \omega_0 t = 0 \Rightarrow \omega_0 t = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \\ 2\omega_0 t &= \pi + 2n\pi \Rightarrow \cos 2\omega_0 t = -1 \\ \text{のときに } w_L(t) &= 0 \quad \therefore K_L = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって、

$$w_L(t) = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} [1 + \cos 2\omega_0 t] = \frac{P_X}{\omega_0} \cos^2 \omega_0 t$$

【 C が保持するエネルギーの瞬時値 $w_C(t)$ 】

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int p_C(t) dt = P_X \int \sin 2\omega_0 t dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \cos 2\omega_0 t + K_C \end{aligned}$$

C が保持するエネルギーは、 C の電圧がゼロのときにゼロであるから、

$$\begin{aligned} v_C(t) = 0 &\Rightarrow \sin \omega_0 t = 0 \Rightarrow \omega_0 t = n\pi \Rightarrow \\ 2\omega_0 t &= 2n\pi \Rightarrow \cos 2\omega_0 t = 1 \\ \text{のときに } w_C(t) &= 0 \quad \therefore K_C = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって、

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{P_X}{\omega_0} [1 - \cos 2\omega_0 t] = \frac{P_X}{\omega_0} \sin^2 \omega_0 t$$

【回路が保持するエネルギーの瞬時値 $w_S(t)$ 】

$$\begin{aligned} w_S(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{P_X}{\omega_0} [\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t] = \frac{P_X}{\omega_0} \end{aligned}$$

$w_S(t)$ が一定ということは、 $w_S(t)$ そのものが「回路が定常的に保持しているエネルギー」であるということの意味する。

【回路が定常的に保持しているエネルギー W_S 】

$$W_S = \frac{P_X}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{2} C V_m^2$$

【 R の有効電力】

$$\begin{aligned} p_R(t) &= v_R(t) i_R(t) \\ &= \frac{V_m^2}{R} \sin^2 \omega_0 t \end{aligned}$$

【 R の一周期の平均電力 P_R 】

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p_R(t) dt \\ &= \frac{V_m^2}{R} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [1 - \cos 2\omega_0 t] dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \frac{1}{T_0} T_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \end{aligned}$$

【 R で一周期に消費されるエネルギー W_D 】

$$\begin{aligned} W_D &= \left[\text{平均電力} \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \right] \times \left[\text{周期} T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right] \\ &= \frac{V_m^2}{R} \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

または、

$$\begin{aligned} W_D &= \int_0^{T_0} p_R(t) dt \\ &= \frac{V_m^2}{R} \int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} T_0 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \frac{2\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

【 Q 値】

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_S}{W_D} \\ &= 2\pi \frac{\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega_0^2 L}}{\frac{V_m^2}{R} \frac{\pi}{\omega_0}} = \frac{R}{\omega_0 L} \\ &= 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_m^2}{\frac{V_m^2}{R} \frac{\pi}{\omega_0}} = \omega_0 C R \\ &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \because \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

この結果は、後述の半値幅方式の定義式から得られる Q 値の式と厳密に一致している。

課題 RLC 並列回路の Q 値 (半値幅方式)

図 1 に示した RLC 並列回路の Q 値を, 半値幅方式の Q 値の定義に基づいて求めよ.

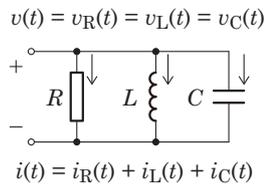


図 6 RLC 並列回路 (図 1 の再掲).

略解

L と C が並列に接続された並列共振回路の場合には, アドミタンスの絶対値 $|Y|$ が共振時の $\sqrt{2}$ 倍になる角周波数 ω_1, ω_2 から $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ を求めればよい. 任意の角周波数における $|Y(\omega)|$ と共振時の $|Y(\omega_0)|$ は, それぞれ次式で与えられる.

$$|Y(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$|Y(\omega_0)| = \frac{1}{R}$$

よって, 次式を満たす ω を求めればよい.

$$\frac{|Y(\omega)|}{|Y(\omega_0)|} = \sqrt{1 + \left(\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \omega CR - \frac{R}{\omega L} = \pm 1$$

$$\therefore \omega^2 \mp \frac{1}{CR}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

この二次方程式の解は,

$$\omega = \pm \frac{1}{2CR} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{C^2 R^2} + \frac{4}{LC}}$$

得られた解のうち, $0 < \omega_1 < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} < \omega_2$ を満たす解は,

$$\omega_{1[-]} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4C^2 R^2}} - \frac{1}{2CR}$$

$$\omega_{2[+]} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4C^2 R^2}} + \frac{1}{2CR}$$

これより, $\Delta\omega$ は,

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{CR}$$

これを半値幅方式の Q 値の定義式の $\Delta\omega$ に代入すれば,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \omega_0 CR$$

さらに, 式 (1) から

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

であることを用いると,

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

となる. この結果は, エネルギー方式の定義式から得られる Q 値の式と一致している.

課題 RLC 並列回路の周波数特性の一般化

RLC 並列回路のインピーダンスの周波数特性を規格化したものが、 ω_0 と Q 値 を用いて次式で表されることを示せ。

$$f(\omega) = 1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

また、この場合に、

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

となることを示せ。

略解

RLC 並列共振回路のアドミタンスを規格化すると、

$$f(\omega) = \frac{Y}{1/R} = 1 + j \left(\omega CR - \frac{R}{\omega L} \right)$$

ここで、虚部の括弧の中を無理やり $\omega_0 CR = Q$ でくくると、

$$\begin{aligned} f(\omega) &= 1 + j\omega_0 CR \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &= 1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \end{aligned}$$

この特性を図示すると、**図 7** のようになる。

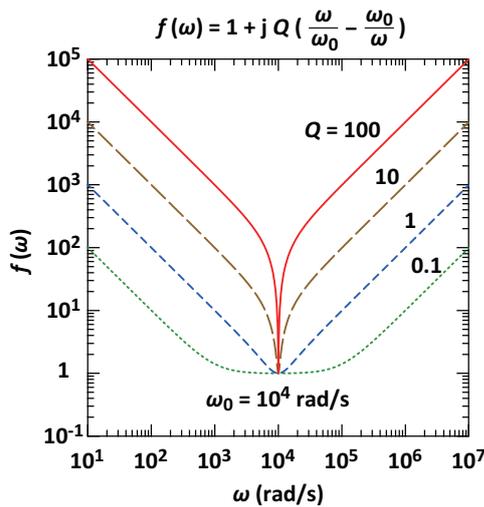


図 7 RLC 並列回路のアドミタンスの周波数特性を規格化したもの。

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ は、以下を満たす ω_2 と ω_1 を求めることで得られる。

$$\begin{aligned} |f(\omega_{1,2})| &= \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \sqrt{2} \\ 0 &< \omega_1 < \omega_0 < \omega_2 \end{aligned}$$

したがって、次式を解けばよい。

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

上式の解で、 $0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ を満たすものは、

$$\begin{aligned} \omega_{1[-]} &= \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right) \\ \omega_{2[+]} &= \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$