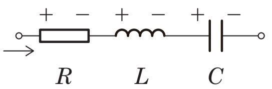
豆知識

RLC 直列回路

$v(t) = v_\mathrm{R}(t) + v_\mathrm{L}(t) + v_\mathrm{C}(t)$



$i(t) = i_\mathrm{R}(t) = i_\mathrm{L}(t) = i_\mathrm{C}(t)$

図 1 RLC 直列回路.

インピーダンス

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

共振条件と共振角周波数

$$\mathrm{Im}[Z(\omega_0)] = 0 \qquad \therefore\ \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \therefore\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1}$$

共振時のインピーダンス

$$Z(\omega_0) = R$$

Q 値（エネルギー方式 = 半値幅方式）

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$\Delta\omega$（エネルギー方式 = 半値幅方式）

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

半値幅方式の ω_1，ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}} - \frac{1}{2}\frac{R}{L}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}} + \frac{1}{2}\frac{R}{L}$$

インピーダンスの周波数特性

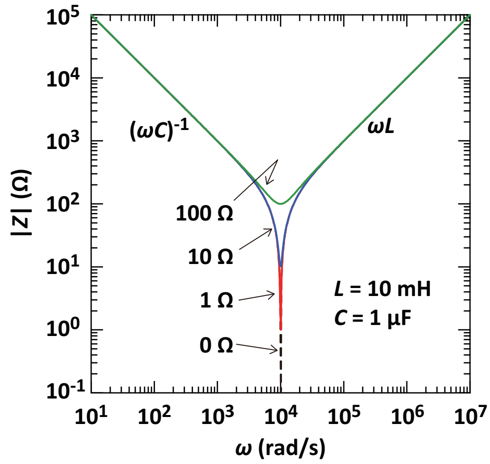


図 2 RLC 直列回路のインピーダンスの周波数特性.

表 1 RLC 直列回路の共振特性の数値例（L = 10 mH, C = 1 μF）．単位は，R (Ω)，角周波数 (rad/s).

R	0	1	10	100
ω_0	10000	10000	10000	10000
ω_1	10000	9950	9513	6180
ω_2	10000	10050	10513	16180
$\Delta\omega_\mathrm{ene}$	0	100	1000	10000
$\Delta\omega_\mathrm{FWHM}$	0	100	1000	10000
Q_ene	∞	100	10	1
Q_FWHM	∞	100	10	1

課題 RLC 直列回路の Q 値（エネルギー方式）

図 1 に示した RLC 直列回路の Q 値を，エネルギー方式の Q 値の定義に基づいて求めよ．

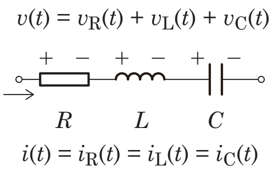


図 3 RLC 直列回路（**図 1** の再掲）．

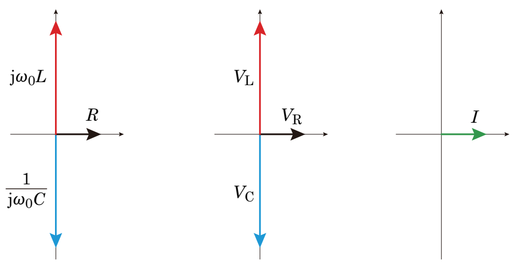


図 4 RLC 直列回路のインピーダンスとフェーザダイヤグラム．

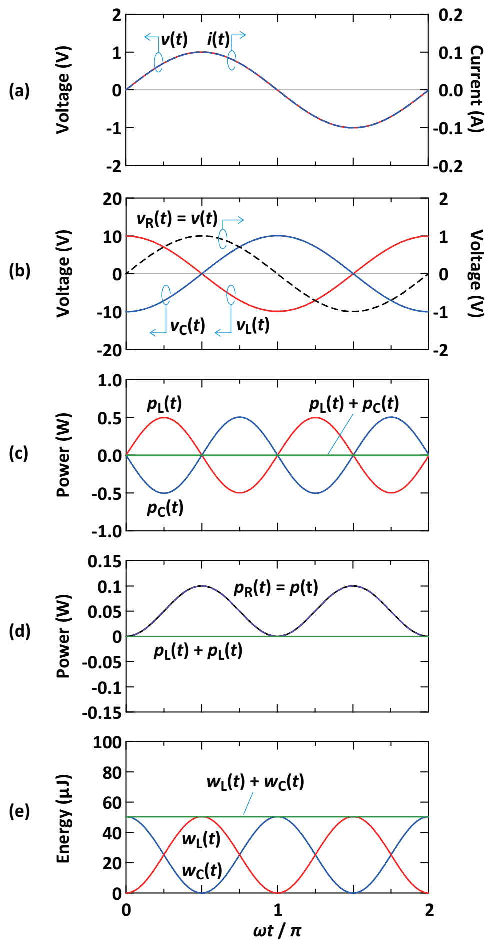


図 5 RLC 直列回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形．

略解

【共振時の端子間電流】

$$i(t)=I_\mathrm{m}\sin\omega_0 t$$

【共振時の各素子の電流・電圧】

$$i_\mathrm{L}(t)=i(t)=I_\mathrm{m}\ \sin\omega_0 t$$
$$v_\mathrm{L}(t)=L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t}=\omega_0 L I_\mathrm{m}\ \cos\omega_0 t$$

$$i_\mathrm{C}(t)=i(t)=I_\mathrm{m}\sin\omega_0 t$$
$$v_\mathrm{C}(t)=\frac{1}{C}\int i_\mathrm{C}(t)\ \mathrm{d}t=-\frac{I_\mathrm{m}}{\omega_0 C}\ \cos\omega_0 t$$

$$i_\mathrm{R}(t)=i(t)=I_\mathrm{m}\ \sin\omega_0 t$$
$$v_\mathrm{R}(t)=Ri(t)=RI_\mathrm{m}\ \sin\omega_0 t$$

【共振時に成り立つ関係】

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}\quad より\quad \frac{1}{2}\omega_0 L I_\mathrm{m}^2=\frac{1}{2}\frac{I_\mathrm{m}^2}{\omega_0 C}$$

ここで，後の電力計算で使うために

$$P_\mathrm{X}=\frac{1}{2}\omega_0 L I_\mathrm{m}^2=\frac{1}{2}\frac{I_\mathrm{m}^2}{\omega_0 C}$$

とする．

【L と C の無効電力】

$$\begin{aligned}p_\mathrm{L}(t)&=v_\mathrm{L}(t)\ i_\mathrm{L}(t)\\&=\omega_0 L I_\mathrm{m}^2\ \sin\omega_0 t\ \cos\omega_0 t\\&=\frac{1}{2}\omega_0 L I_\mathrm{m}^2\ \sin 2\omega_0 t\\&=P_\mathrm{X}\ \sin 2\omega_0 t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_\mathrm{C}(t)&=v_\mathrm{C}(t)\ i_\mathrm{C}(t)\\&=-\frac{I_\mathrm{m}^2}{\omega_0 C}\ \sin\omega_0 t\ \cos\omega_0 t\\&=-\frac{1}{2}\frac{I_\mathrm{m}^2}{\omega_0 C}\ \sin 2\omega_0 t\\&=-P_\mathrm{X}\ \sin 2\omega_0 t\end{aligned}$$

【L が保持するエネルギーの瞬時値 $w_\mathrm{L}(t)$】

$$\begin{aligned}w_\mathrm{L}(t)&=\int p_\mathrm{L}(t)\ \mathrm{d}t=P_\mathrm{X}\int\sin 2\omega_0 t\ \mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\cos 2\omega_0 t+K_\mathrm{L}\end{aligned}$$

L が保持するエネルギーは，L の電流がゼロのときにゼロであるから，

$$i_\mathrm{L}(t)=0\ \Rightarrow\ \sin\omega_0 t=0\ \Rightarrow\ \omega_0 t=n\pi\ \Rightarrow$$
$$2\omega_0 t=2n\pi\ \Rightarrow\ \cos 2\omega_0 t=1$$
$$のときに\ w_\mathrm{L}(t)=0\quad\therefore\quad K_\mathrm{L}=\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}$$

よって，

$$w_\mathrm{L}(t)=\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\left[1-\cos 2\omega_0 t\right]=\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\sin^2\omega_0 t$$

【C が保持するエネルギーの瞬時値 $w_\mathrm{C}(t)$】

$$\begin{aligned}w_\mathrm{C}(t)&=\int p_\mathrm{C}(t)\ \mathrm{d}t=P_\mathrm{X}\int(-\sin 2\omega_0 t)\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\cos 2\omega_0 t+K_\mathrm{C}\end{aligned}$$

C が保持するエネルギーは，C の電圧がゼロのときにゼロであるから，

$$v_\mathrm{C}(t)=0\ \Rightarrow\cos\omega_0 t=0\Rightarrow\omega_0 t=\frac{\pi}{2}+n\pi\ \Rightarrow$$
$$2\omega_0 t=\pi+2n\pi\ \Rightarrow\cos 2\omega_0 t=-1$$
$$のときに\ w_\mathrm{C}(t)=0\quad\therefore\quad K_\mathrm{C}=\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}$$

よって，

$$w_\mathrm{C}(t)=\frac{1}{2}\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\left[1+\cos 2\omega_0 t\right]=\frac{P_\mathrm{X}}{\omega_0}\cos^2\omega_0 t$$

【回路が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{S}}(t)$】

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{S}}(t) &= w_{\mathrm{C}}(t) + w_{\mathrm{L}}(t) \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\left[\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t\right] = \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

$w_{\mathrm{S}}(t)$ が一定ということは，$w_{\mathrm{S}}(t)$ そのものが「回路が定常的に保持しているエネルギー」であるということを意味する．

【回路が定常的に保持しているエネルギー W_{S}】

$$W_{\mathrm{S}} = \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} = \frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0^2 C}$$

【R の有効電力】

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{R}}(t) &= v_{\mathrm{R}}(t) i_{\mathrm{R}}(t) \\ &= RI_{\mathrm{m}}^2 \sin^2\omega_0 t \end{aligned}$$

【R の一周期の平均電力 P_{R}】

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p_{\mathrm{R}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= RI_{\mathrm{m}}^2\ \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2\ \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left[1-\cos 2\omega_0 t\right]\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2\ \frac{1}{T_0} T_0 \\ &= \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2 \end{aligned}$$

【R で一周期に消費されるエネルギー W_{D}】

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{D}} &= \left[\text{平均電力 } \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2\right] \times \left[\text{周期 } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\right] \\ &= RI_{\mathrm{m}}^2\ \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{D}} &= \int_0^{T_0} p_{\mathrm{R}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= RI_{\mathrm{m}}^2 \int_0^{T_0} \sin^2\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2\ T_0 = \frac{1}{2}\ RI_{\mathrm{m}}^2\ \frac{2\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

【Q 値】

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\frac{W_{\mathrm{S}}}{W_{\mathrm{D}}} \\ &= 2\pi\frac{\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2}{RI_{\mathrm{m}}^2\frac{\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= 2\pi\frac{\frac{1}{2}\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0^2 C}}{RI_{\mathrm{m}}^2\frac{\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{\omega_0 CR} \\ &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \because\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

この結果は，後述の半値幅方式の定義式から得られる Q 値の式と厳密に一致している．

課題 RLC 直列回路の Q 値（半値幅方式）

図 1 に示した RLC 直列回路の Q 値を，半値幅方式の Q 値の定義に基づいて求めよ．

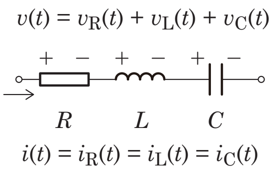


図 6 RLC 直列回路（**図 1** の再掲）．

略解

L と C が直列に接続された直列共振回路の場合には，インピーダンスの絶対値 $|Z|$ が共振時の $\sqrt{2}$ 倍になる周波数 ω_1，ω_2 から，$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ を求めればよい．任意の角周波数における $|Z(\omega)|$ と共振時の $Z(\omega_0)$ は，それぞれ次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&|Z(\omega_0)| = R
\end{aligned}
$$

よって，次式を満たす ω を求めればよい．

$$
\begin{aligned}
&\frac{|Z(\omega)|}{|Z(\omega_0)|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2} = \sqrt{2} \\
&\therefore \quad \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = \pm 1 \\
&\therefore \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0
\end{aligned}
$$

この二次方程式の解は，

$$
\omega = \pm\frac{1}{2}\frac{R}{L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}
$$

得られた解のうち，$0 < \omega_1 < \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} < \omega_2$ を満たす解は，

$$
\begin{matrix} \omega_1[-] \\ \omega_2[+] \end{matrix} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}} \mp \frac{1}{2}\frac{R}{L}
$$

これより，$\Delta\omega$ は，

$$
\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}
$$

これを半値幅方式の Q 値の定義式の $\Delta\omega$ に代入すれば，

$$
Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}
$$

さらに，式 (1) から

$$
\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad L = \frac{1}{\omega_0^2 C}
$$

であることを用いると，

$$
Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}
$$

となる．これは，エネルギー方式の定義式から得られる Q 値の式と一致している．

課題 RLC 直列回路の周波数特性の一般化

RLC 直列回路のインピーダンスの周波数特性を規格化したものが，ω_0 と Q 値 を用いて次式で表されることを示せ．

$$f(\omega) = 1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

また，この場合に，

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

となることを示せ．

略解

RLC 直列共振回路のインピーダンスを規格化すると，

$$f(\omega) = \frac{Z}{R} = 1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)$$

ここで，虚部の括弧の中を無理やり $\dfrac{\omega_0 L}{R} = Q$ でくくると，

$$\begin{aligned} f(\omega) &= 1 + \mathrm{j}\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \\ &= 1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \end{aligned}$$

この特性を図示すると，**図 7** のようになる．

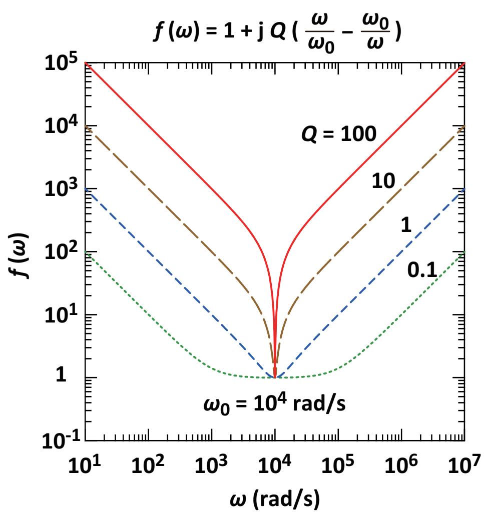


図 7 RLC 直列回路のインピーダンスの周波数特性を規格化したもの．

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ は，以下を満たす ω_2 と ω_1 を求めることで得られる．

$$|f(\omega_{1,2})| = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

したがって，次式を解けばよい．

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{Q}$$

上式の解で，$0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ を満たすものは，

$$\begin{matrix}\omega_1[-] \\ \omega_2[+]\end{matrix} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1 + 4Q^2} \mp 1\right)$$

よって，

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$