豆知識

RL 並列 C 直列回路

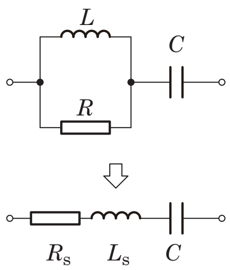

図 1 RL 並列 C 直列回路と等価な RLC 直列回路.

インピーダンス［回路 (a)］

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\\
&= \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}+\frac{\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\\
&= \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}+\frac{\mathrm{j}}{\omega}\left[\frac{\dfrac{1}{L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}-\frac{1}{C}\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

インピーダンス［回路 (b)］

$$
Z = R_\mathrm{s}+\mathrm{j}\omega L_\mathrm{s}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}
$$

共振条件と共振角周波数

$$
\mathrm{Im}[Z(\omega_0)]=0 \quad \therefore \quad \frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega_0^2L^2}=\frac{C}{L}
$$

$$
\frac{1}{\omega_0}=L\sqrt{\frac{C}{L}-\frac{1}{R^2}}=\sqrt{LC-\frac{L^2}{R^2}}
\tag{2}
$$

共振の必要条件 $R^2>\dfrac{L}{C}$

共振時の等価な RLC 直列回路

$$
R_\mathrm{s}=\frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}
$$

$$
\omega L_\mathrm{s}=\frac{\dfrac{1}{L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}
$$

共振時のインピーダンス

$$
Z(\omega_0)=R_\mathrm{s}=\frac{L}{CR}
\tag{3}
$$

Q 値（エネルギー方式・等価回路方式・電力方式）

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega_0L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}=\frac{1}{\omega_0CR_\mathrm{s}}=\frac{R}{\omega_0L}\\
&= R\sqrt{\frac{C}{L}-\frac{1}{R^2}} \qquad \text{参考 } Q^2=\frac{CR^2}{L}-1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$\Delta\omega$（エネルギー方式・等価回路方式から逆算）

$$
\frac{1}{\Delta\omega}=\frac{Q}{\omega_0}=CR-\frac{L}{R}
$$

半値幅方式の ω_1，ω_2 ($\omega_1<\omega_2$)

$$
\frac{1}{\omega_1}=\sqrt{LC+\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}+\frac{L^2}{R^2}\sqrt{\frac{CR^2}{L}+\frac{9}{4}}}
$$

$$
\frac{1}{\omega_2}=\sqrt{LC+\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}-\frac{L^2}{R^2}\sqrt{\frac{CR^2}{L}+\frac{9}{4}}}
$$

Q(エネルギー方式) >10 であれば,

$$
\frac{1}{\Delta\omega}=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\approx CR-\frac{L}{R}
$$

インピーダンスの周波数特性

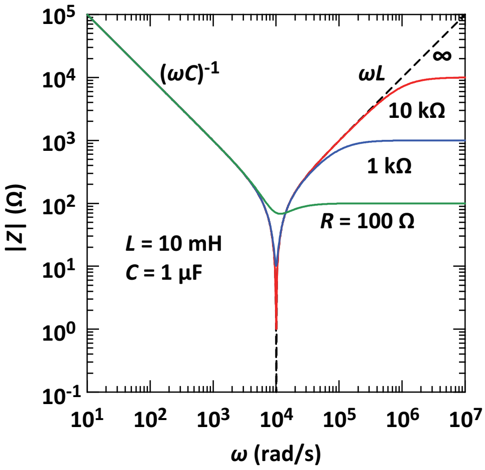

図 2 RL 並列 C 直列型のインピーダンスの周波数特性.

表 1 共振周特性の数値例（L = 10 mH，C = 1 μF）. 単位は，R (Ω)，角周波数 (rad/s). 共振の必要条件は，$R > \sqrt{L/C} = 100\ \Omega$.

R	∞	10 k	1 k	500	100
$R > \sqrt{L/C}$	yes	yes	yes	yes	no
ω_0	10000	10000	10050	10206	∞
ω_1	10000	9950	9508	9021	5503
ω_2	10000	10050	10518	11103	n/a
$\Delta\omega_{\mathrm{FWHM}}$	0	100	1010	2082	n/a
$\Delta\omega_{\mathrm{ene}}$	0	100	1010	2083	n/a
Q_{ene}	∞	100	9.95	4.90	n/a
Q_{FWHM}	∞	100	9.95	4.90	n/a

課題 RL 並列 C 直列型の Q 値（エネルギー方式）

図 3 に示した RL 並列 C 直列型の共振回路の Q 値が次式で与えられることを，エネルギー方式の Q 値の定義に基づいて求めよ．

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}}$$

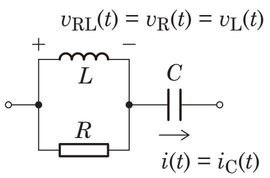

図 3 RL 並列 C 直列型の共振回路．

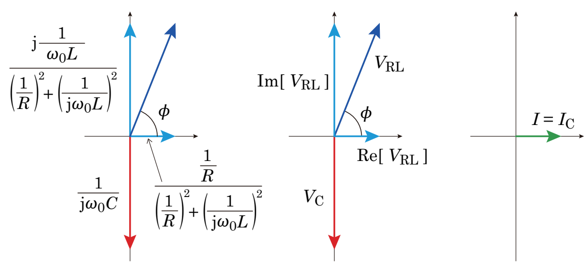

図 4 RL 並列 C 直列型のフェーザダイヤグラム．

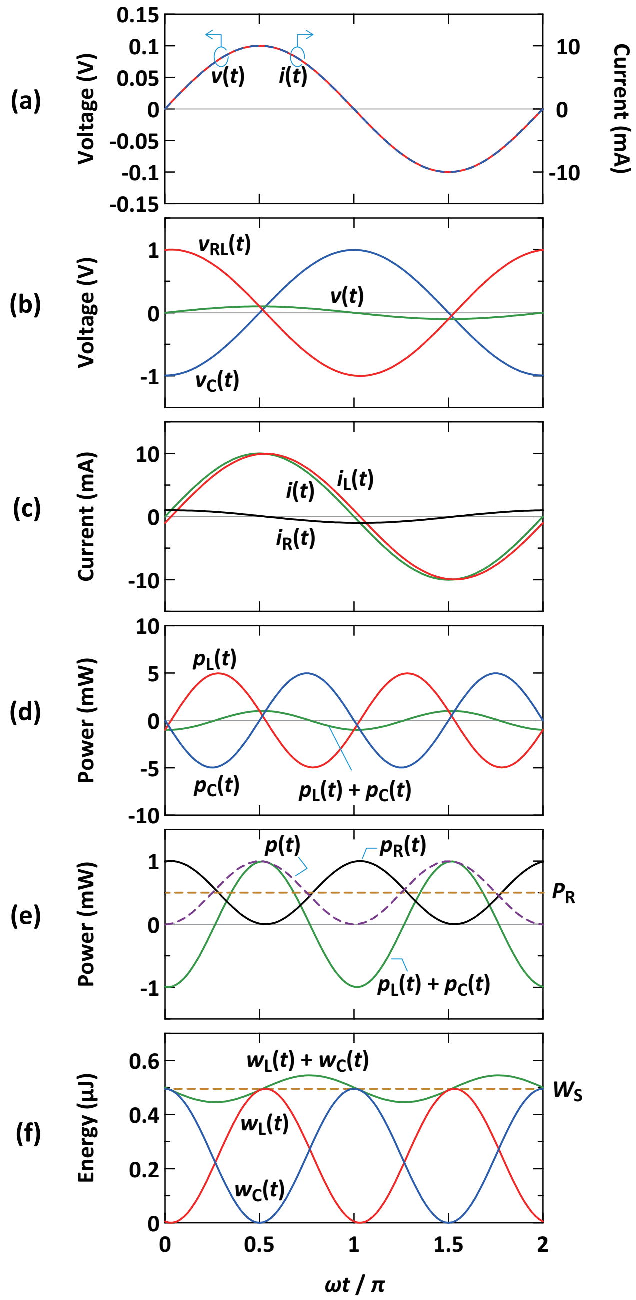

図 5 RL 並列 C 直列型の電圧・電流・電力・エネルギーの波形．

略解

【共振時の端子間電流】

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin\omega_0 t$$

【共振時の各素子の電流・電圧】

$$i_{\mathrm{C}}(t) = i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin\omega_0 t$$
$$v_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C}\int i_{\mathrm{C}}(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega_0 C}\cos\omega_0 t$$

$$i_{\mathrm{RL}}(t) = i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin\omega_0 t$$
$$v_{\mathrm{RL}}(t) = V_{\mathrm{RLm}} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_{\mathrm{L}}(t) = v_{\mathrm{RL}}(t) = V_{\mathrm{RLm}} \sin(\omega_0 t + \phi)$$
$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{L}\int v_{\mathrm{RL}}(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{V_{\mathrm{RLm}}}{\omega_0 L}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_{\mathrm{R}}(t) = v_{\mathrm{RL}}(t) = V_{\mathrm{RLm}} \sin(\omega_0 t + \phi)$$
$$i_{\mathrm{R}}(t) = \frac{v_{\mathrm{R}}(t)}{R} = \frac{V_{\mathrm{RLm}}}{R}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

【V_{RLm} と ϕ】

V_{RLm} と ϕ は，与えられたパラメータで表す必要がある．これらは，フェーザを用いた以下の計算で求められる．

I	$i(t)$ のフェーザ	$I = \dfrac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle 0$
V_{RL}	$v_{\mathrm{RL}}(t)$ のフェーザ	$V_{\mathrm{RL}} = \dfrac{V_{\mathrm{RLm}}}{\sqrt{2}}\angle\phi$
Z_{RL}	R と L の並列回路のインピーダンス	

とすると，

$$V_{\mathrm{RL}} = Z_{\mathrm{RL}} I \qquad Z_{\mathrm{RL}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}}$$

よって

$$V_{\mathrm{RLm}} = |Z_{\mathrm{RL}}|\ I_{\mathrm{m}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega_0^2 L^2}}} \tag{5}$$

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{\omega_0 L}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

【共振時に成り立つ関係】

端子間のインピーダンスは，

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} + \frac{\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \\ &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} + \mathrm{j}\left[\frac{\frac{1}{\omega_0 L}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} - \frac{1}{\omega_0 C}\right] \end{aligned}$$

共振時に $\mathrm{Im}[Z] = 0$ であるから，

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\frac{1}{\omega_0 L}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad \therefore\ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} = \frac{C}{L}$$

これより，式 (5) の V_{RLm} と I_{m} の関係は，以下のように書き換えられる．

$$V_{\mathrm{RLm}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{C/L}} \quad \therefore\ \frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{L} = \frac{I_{\mathrm{m}}^2}{C}$$

以下の電力計算では，上式から導かれる次式を使う．

$$P_{\mathrm{X}} = \frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{2}\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0 C}$$

【L と C の無効電力】

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{L}}(t) &= v_{\mathrm{L}}(t)\ i_{\mathrm{L}}(t) \\ &= -\frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{\omega_0 L}\ \sin(\omega_0 t + \phi)\ \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{\omega_0 L}\ \frac{1}{2}\ \sin(2\omega_0 t + 2\phi) \\ &= -P_{\mathrm{X}}\ \sin(2\omega_0 t + 2\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{C}}(t) &= v_{\mathrm{C}}(t)\ i_{\mathrm{C}}(t) \\ &= -\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0 C}\ \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t \\ &= -\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0 C}\ \frac{1}{2}\ \sin 2\omega_0 t \\ &= -P_{\mathrm{X}}\ \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

【L が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{L}}(t)$】

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{L}}(t) &= \int p_{\mathrm{L}}(t)\ \mathrm{d}t = -P_{\mathrm{X}} \int \sin\left(2\omega_0 t + 2\phi\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos\left(2\omega_0 t + \phi\right) + K_{\mathrm{L}} \end{aligned}$$

L が保持するエネルギーは，L の電流がゼロのときにゼロであるから，

$$\begin{aligned} & i_{\mathrm{L}}(t) = 0 \ \Rightarrow\ \cos\left(\omega_0 t + \phi\right) = 0 \ \Rightarrow \\ & \omega_0 t + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \ \Rightarrow\ 2\omega_0 t + 2\phi = \pi + 2n\pi \ \Rightarrow \\ & \cos\left(2\omega_0 t + \phi\right) = -1 \text{ のときに } w_{\mathrm{L}}(t) = 0 \\ & \therefore\ K_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{L}}(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[1 + \cos\left(2\omega_0 t + 2\phi\right)\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

【C が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{C}}(t)$】

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{C}}(t) &= \int p_{\mathrm{C}}(t)\ \mathrm{d}t = -P_{\mathrm{X}} \int \sin 2\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos 2\omega_0 t + K_{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

C が保持するエネルギーは，C の電圧がゼロのときにゼロであるから，

$$\begin{aligned} & v_{\mathrm{C}}(t) = 0 \ \Rightarrow\ \cos\omega_0 t = 0 \ \Rightarrow \\ & \omega_0 t = \frac{\pi}{2} + n\pi \ \Rightarrow\ 2\omega_0 t = \pi + 2n\pi \ \Rightarrow \\ & \cos 2\omega_0 t = -1 \text{ のときに } w_{\mathrm{C}}(t) = 0 \\ & \therefore\ K_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{C}}(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[1 + \cos 2\omega_0 t\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \cos^2 \omega_0 t \end{aligned}$$

【回路が保持するエネルギーの瞬時値 $w_{\mathrm{S}}(t)$】[*1]

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{S}}(t) &= w_{\mathrm{L}}(t) + w_{\mathrm{C}}(t) \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2 \omega_0 t\right] \\ &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}\ \left[1 + \cos\phi \cos 2\omega_0 t\right] \end{aligned}$$

- 第 1 項 $\dfrac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0}$ は
  定数であり，回路が定常的に保持しているエネルギーである．
- 第 2 項 $\dfrac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \cos\phi \cos\left(2\omega_0 t + \phi\right)$ は
  ゼロを中心として正負に振動する正弦波であり，電源との間で往復するエネルギーである．つまり，定常的に回路が保持しているエネルギーではない．

【回路が定常的に保持するエネルギー W_{S}】

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{S}} &= \frac{P_{\mathrm{X}}}{\omega_0} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{2}\,\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{\omega_0 C} \end{aligned}$$

なお，これより，

$$W_{\mathrm{S}} = \max\left[w_{\mathrm{L}}(t)\right] = \max\left[w_{\mathrm{C}}(t)\right]$$

ということがわかる．

[*1] ここでの式変形については，豆知識「位相差のある二つの正弦波の二乗の和」を参照されたし．

【R の有効電力】

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{R}}(t) &= v_{\mathrm{R}}(t)\ i_{\mathrm{R}}(t) \\ &= \frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{R}\ \sin\bigl(\omega_0 t + \phi\bigr) \end{aligned}$$

【R の一周期の平均電力 P_{R}】

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p_{\mathrm{R}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{R}\ \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \phi)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{R} \end{aligned}$$

【R で一周期に消費されるエネルギー W_{D}】

$$W_{\mathrm{D}} = P_{\mathrm{R}}\ T_0 = \frac{1}{2}\ \frac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{R}\ \frac{2\pi}{\omega_0}$$

【Q 値】

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_{\mathrm{S}}}{W_{\mathrm{D}}} = 2\pi \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{\omega_0 L}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{V_{\mathrm{RLm}}^2}{R}\dfrac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{R^2}} \end{aligned}$$

課題 RL 並列 C 直列型の Q 値：直列への変換

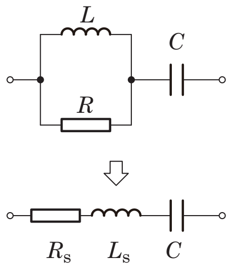

図 6 RL 並列 C 直列型共振回路と等価な R+L+C 型.

図 6(a) の共振回路の場合には，**図 6**(b) のように，並列接続された R と L を直列接続の R_{s} と L_{s} に変換することで，RLC 直列型に帰着できる．したがって，RLC 直列型の Q 値の公式より，

$$Q = \frac{1}{\omega_0 C R_{\mathrm{s}}} = \frac{\omega_0 L_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{s}}}\sqrt{\frac{L_{\mathrm{s}}}{C}} \tag{6}$$

となる．これがエネルギー方式で得られる Q 値の式と一致することを示せ．

略解

R_s と L_s は，**図 6** の二つの回路のインピーダンス Z_a と Z_b が等しいとすることで求められる．

$$
\begin{aligned}
Z_\mathrm{a} &= \frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\
&= \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2 L^2}}+\mathrm{j}\frac{\dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2 L^2}}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \qquad (7) \\
Z_\mathrm{b} &= R_\mathrm{s}+\mathrm{j}\omega L_\mathrm{s}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}
\end{aligned}
$$

であるから，R_s と L_s は以下の通りとなる．

$$
\begin{aligned}
R_\mathrm{s} &= \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2 L^2}} \\
\omega L_\mathrm{s} &= \frac{\dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2 L^2}}
\end{aligned}
$$

次に，Q 値を求めるときの角周波数，つまり共振角周波数 ω_0 における R_s と L_s の表式を求めよう．式 (7) の虚部 = 0 より，

$$
\frac{\dfrac{1}{L}}{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega_0^2 L^2}}=\frac{1}{C} \quad \therefore \quad \frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega_0^2 L^2}=\frac{C}{L} \qquad (8)
$$

$$
\therefore \quad \frac{1}{\omega_0^2 L^2}=\frac{C}{L}-\frac{1}{R^2}
$$

$$
\therefore \quad \frac{1}{\omega_0}=L\sqrt{\frac{C}{L}-\frac{1}{R^2}}=\sqrt{LC-\frac{L^2}{R^2}} \qquad (9)
$$

となる．これより，R_s と $\omega_0 L_\mathrm{s}$ は以下の通りとなる．

$$
\begin{aligned}
R_\mathrm{s} &= \frac{\dfrac{1}{R}}{C/L}=\frac{L}{CR} \\
\omega_0 L_\mathrm{s} &= \frac{\dfrac{1}{\omega_0 L}}{C/L}=\frac{1}{\omega_0 C}
\end{aligned}
$$

ここで，ω_0 を求める途中の式 (8) を用いた．

得られた R_s と L_s を式 (6) に代入し，式 (9) も用いると，R，L，C を用いた Q 値の表式は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega_0 L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}=\frac{1}{\omega_0 C R_\mathrm{s}}=\frac{R}{\omega_0 L} \\
&= R\sqrt{\frac{C}{L}-\frac{1}{R^2}}
\end{aligned}
$$

この Q 値の表式は，RL 並列 C 直列型の Q 値をエネルギー方式で求めた場合の表式と一致している．

課題 等価変換で求めた Q 値の妥当性

前課題の等価変換で Q 値を求めることの妥当性を検討せよ．

略解

抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後において以下が成り立つからである．[*2]

- 抵抗での有効電力は同じ．
- リアクタンスでの無効電力は同じ．

- 抵抗での一周期の消費エネルギーは同じ．
- リアクタンスの最大保持エネルギーは同じ．

[*2] 抵抗とリアクタンスの直列⇔並列の等価変換前後における各回路素子の電力波形・エネルギー波形の詳細については，「直列と並列の等価変換（R と L）」，「直列と並列の等価変換（R と C）」を参照されたし．

課題　RL 並列 C 直列型の Q 値の導出（半値幅方式）

図 3 に示した RL 並列 C 直列型の共振回路の Q 値を，半値幅方式の Q 値の定義に基づいて求めよ．

略解

半値幅方式の Q 値の定義式は次式である．

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{10}$$

分子の ω_0 は式 (2) で与えられる．一方，分母の $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$ における ω_1 と ω_2 は

$$|Z|=\sqrt{2}\,|Z(\omega_0)|$$

となる ω である．ここで，Z は式 (1) で与えられ，$Z(\omega_0)$ は式 (3) で与えられる．したがって，次式を解く必要がある．

$$\sqrt{\left[\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega^2L^2}}\right]^2+\left[\frac{\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega^2L^2}}-\frac{1}{\omega C}\right]^2}=\frac{L}{CR}\sqrt{2}$$

これを満たし，$0<\omega_1<\omega_0<\omega_2$ となる ω_1，ω_2 を求めるのはかなり面倒であるが，以下のような解が得られる．*3

$$\begin{matrix}\omega_1^{-1}[+]\\ \omega_2^{-1}[-]\end{matrix}=\sqrt{LC+\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}\pm\frac{L^2}{R^2}\sqrt{\frac{CR^2}{L}+\frac{9}{4}}} \tag{11}$$

この解の式から，半値幅方式で得られる Q 値の表式がエネルギー方式で得られる Q 値の式［式 (4)］と一致しないことがわかる．

ただし，回路の Q 値がある程度大きい場合には，式 (11) から得られる $\Delta\omega$ が，エネルギー方式の Q 値を式 (10) に代入して得られる $\Delta\omega$ と近似的に等しくなる．つまり，Q 値がある程度大きい場合には，エネルギー方式と半値幅方式の Q 値は近似的に一致する．以下では，そのことを示す．

まず，

$$k=\frac{L}{R}$$

とする．さらに，式 (2) と式 (4) を用いると，式 (11) は以下のように書き換えられる．

$$\begin{matrix}\omega_1^{-1}[+]\\ \omega_2^{-1}[-]\end{matrix}=\sqrt{\omega_0^{-2}+k^2\left(\frac{3}{2}\pm\sqrt{Q^2+1+\frac{9}{4}}\right)} \tag{12}$$

ここで，$1\ll Q$ である場合には，以下のような近似が成り立つ．

$$\frac{3}{2}\pm\sqrt{Q^2+1+\frac{9}{4}}\ \approx\ \frac{3}{2}\pm Q\ \approx\ \pm Q$$

この近似を式 (12) に適用すると，以下のようになる．

$$\begin{matrix}\omega_1^{-1}[-]\\ \omega_2^{-1}[+]\end{matrix}=\sqrt{\omega_0^{-2}\pm k^2Q}$$

ここで，式 (4) より，

$$Q=\frac{R}{\omega_0L}=\frac{1}{\omega_0k}\quad\therefore\quad k^2Q=\frac{k^2Q^2}{Q}=\frac{\omega_0^{-2}}{Q}$$

であることから，上式は以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\omega_1^{-1}[-]\\ \omega_2^{-1}[+]\end{matrix}&=\sqrt{\omega_0^{-2}\pm\frac{\omega_0^{-2}}{Q}}=\omega_0^{-1}\sqrt{1\pm\frac{1}{Q}}\\&\approx\omega_0^{-1}\left(1\pm\frac{1}{2Q}\right)=\omega_0^{-1}\pm\frac{\omega_0^{-1}}{2Q}\\&=\omega_0^{-1}\pm\frac{k}{2}\end{aligned}$$

最後の式変形では，$1\ll Q$ であることを用いて，テーラー展開の第 2 項までの近似を行った．これより，

$$\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}=k$$

となる．このままでは，$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$ との関係がわからないが，$1\ll Q$ のときに $\omega_1\approx\omega_2\approx\omega_0$ であることを利用すると，

$$k=\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2}\approx\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}$$

となる．これより，

$$\frac{1}{\Delta\omega}=\frac{1}{k\omega_0^2}=\frac{LC-\frac{L^2}{R^2}}{\frac{L}{R}}=CR-\frac{L}{R}$$

となる．つまり，Q 値が十分に大きい場合には，エネルギー方式で得られた Q 値から逆算した $\Delta\omega$ と半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ は近似的に一致する．以下では，この近似の程度を数値計算によって確認する．

*3 Wolfram alpha の助けを借りる．

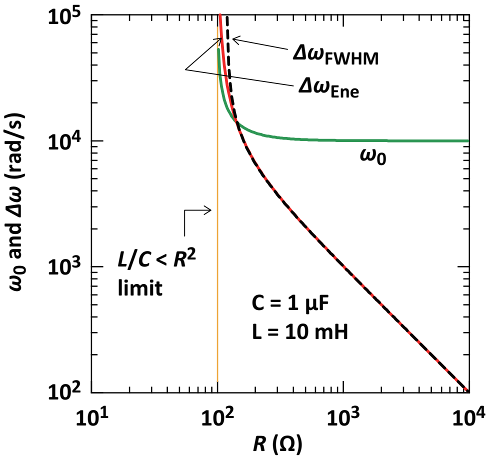

図 7 RL 並列 C 直列型の $\Delta\omega$ の定義式依存性.

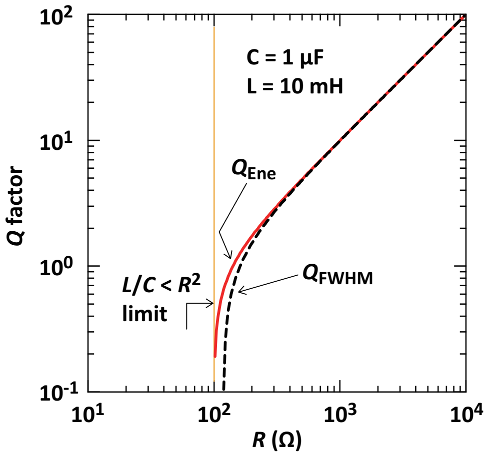

図 8 RL 並列 C 直列型の Q 値の定義式依存性.

図 7 は，ω_0，半値幅方式の $\Delta\omega$，エネルギー方式の $\Delta\omega$ を $C = 1\ \mu$F，$L = 10$ mH，$R = 1 \sim 10^3\ \Omega$ として計算した結果である．この図から，$R < 10\ \Omega$（つまり，$Q > 10$）であれば，エネルギー方式の Q 値から逆算した $\Delta\omega$ が，半値幅方式で得られる $\Delta\omega$ の良い近似になっていることがわかる．

図 8 は，半値幅方式とエネルギー方式の Q 値を $C = 1\ \mu$F，$L = 10$ mH，$R = 1 \sim 10^3\ \Omega$ として計算した結果である．この図から，$R < 10\ \Omega$（つまり，$Q > 10$）であれば，エネルギー方式の Q 値が，半値幅方式で得られる Q 値のよい近似になっていることがわかる．