豆知識

電源のない LC 回路

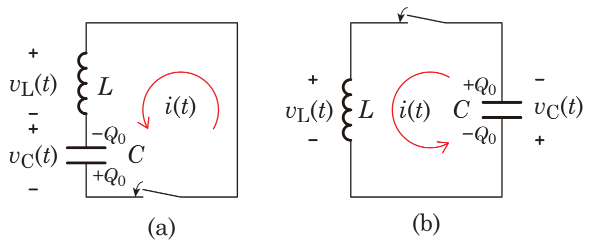

図 1 電源のない LC 回路.

初期条件

図 1 (a) の C の下側の電極に保持されていた正電荷が $t>0$ で放電して $i(t)$ となる，と想定.[*1]

$$i(0)=0$$
$$v_\mathrm{C}(0)=-V_0 \quad \therefore \quad v_\mathrm{L}(0)=V_0$$

回路方程式

$$v_\mathrm{L}(t)+v_\mathrm{C}(t)=0$$
$$\therefore \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\ \mathrm{d}\tau=0$$
$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}i=0 \tag{1}$$

回路方程式の一般解

微分方程式 (1) の解の形を e^{st} と仮定すると，特性方程式とその解は,

$$s^2+\frac{1}{LC}=0 \quad \therefore \quad s=\pm\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ここで,

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

とすると，一般解は，任意定数 A_1，A_2 を用いて,

$$i(t)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

ここで，Eular の公式より,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+\mathrm{j}\sin\omega_0 t$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos\omega_0 t-\mathrm{j}\sin\omega_0 t$$

[*1] その場合，$v_\mathrm{C}(0)$ が負となることに留意．**図 1** (b) のように描き直すと分かりやすいかも.

であるから,

$$i(t)=B_1\cos\omega_0 t+B_2\sin\omega_0 t$$
$$B_1=A_1+A_2 \qquad B_2=A_1-A_2$$

初期条件による係数決定

$i(0)=0$ より,

$$i(0)=B_1=0 \quad \therefore \quad i(t)=B_2\sin\omega_0 t$$

$v_\mathrm{L}(0)=V_0$ より,

$$v(0)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\omega_0 LB_2\cos\omega_0 t\Big|_{t=0}$$
$$=\omega_0 LB_2=V_0 \quad \therefore \quad B_2=\frac{V_0}{\omega_0 L}$$

よって，回路に流れる電流 $i(t)$ は，次式で表される角周波数 ω_0 の正弦波となる.[*2]

$$i(t)=\frac{V_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t$$

L と *C* の電圧

$$v_\mathrm{L}(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=V_0\cos\omega_0 t$$
$$v_\mathrm{C}(t)=-v_\mathrm{L}(t)=-V_0\cos\omega_0 t$$

L と *C* の電力

$$p_\mathrm{L}(t)=v_\mathrm{L}(t)\ i(t)=\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$$
$$=\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\sin 2\omega_0 t$$

$$p_\mathrm{C}(t)=v_\mathrm{C}(t)\ i(t)=-\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\sin 2\omega_0 t$$

よって，L と C の電力は,

$$p_\mathrm{L}(t)=-p_\mathrm{C}(t)$$

⇒ L と C が等量のエネルギーを交換

[*2] $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ より，$i(t)=-\omega_0 CV_0\sin\omega_0 t$ でもよい.

<u>L のエネルギー</u>

$$w_L(t) = \int p_L(t)\ dt$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\int \sin 2\omega_0 t\ dt$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}\cos 2\omega_0 t + K_L$$

$t = 0$ で L の電流が $i_L(0) = 0$ であるから，$t = 0$ で L が持つ初期エネルギーは,

$$w_L(0) = \frac{1}{2}Li(0)^2 = 0 \quad \therefore\ K_L = \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}$$

よって,

$$w_L(t) = \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}(1 - \cos 2\omega_0 t)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}\sin^2 \omega_0 t$$

<u>C のエネルギー</u>

$$w_C(t) = \int_0^t p_C(t)\ dt$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0 L}\int \sin 2\omega_0 t\ dt$$
$$= \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}\cos 2\omega_0 t + K_C$$

$t = 0$ で C の電圧が $v_C(0) = -V_0$ であるから，$t = 0$ で C が持つ初期エネルギーは,

$$w_C(0) = \frac{1}{2}Cv_C(0)^2 = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}$$
$$\because\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \ \Rightarrow\ C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$
$$\therefore\ K_C = \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}$$

よって,

$$w_C(t) = \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}(1 + \cos 2\omega_0 t)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}\cos^2 \omega_0 t$$

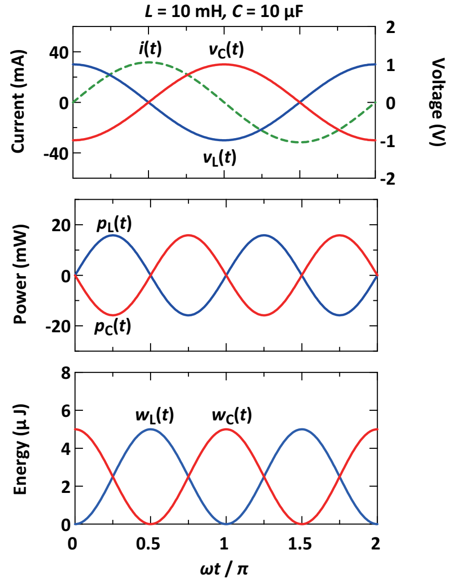

図 2 電源のない LC 回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形.

<u>回路全体が保持するエネルギー</u>

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}\left[\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}$$
$$= \frac{1}{2}CV_0^2 \quad \because\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

⇒ **L と C の間でエネルギー交換が生じるが，**
回路全体としては，初期エネルギーが
永久に保持される．
（エネルギー保存則）