

豆知識

電源のない RLC 回路 (直列)

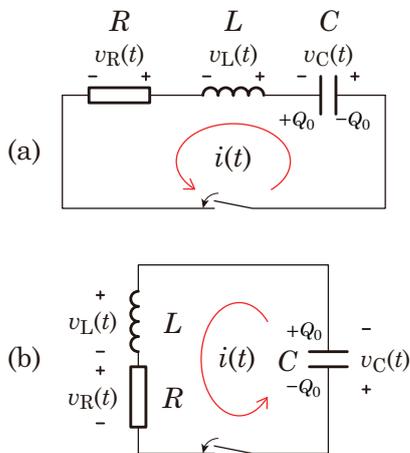


図 1 電源のない RLC 直列回路.

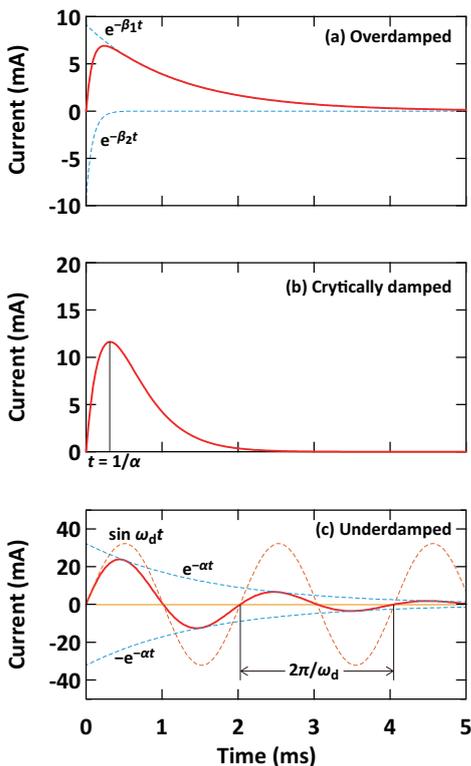


図 2 電源のない RLC 直列回路の特徴的な 3 つの条件下における電流波形.

初期条件

図 1 (a) の初期電流はゼロで, C の左側の電極に正電荷が保持されていた, と想定すると,*¹

$$i(0) = 0 \quad \therefore \quad v_R(0) = 0 \quad (1)$$

$$v_C(0) = -V_0 \quad \therefore \quad v_L(0) = V_0 \quad (2)$$

回路方程式

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = 0$$

これより,

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (3)$$

回路方程式の一般解

解の形を e^{st} と仮定すると, 微分方程式 (3) の特性方程式は,

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (4)$$

この解は,

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

ただし

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

よって, 一般解は, A_1, A_2 を任意定数として,

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

となる. ただし, α と ω_0 の大小関係によって, 特性方程式 (4) の解 s_1, s_2 が以下の 3 つの形式をとり得る.

1. $\alpha > \omega_0$: 異なる実解. このとき $R > 2\sqrt{L/C}$.
2. $\alpha = \omega_0$: 重解. このとき $R = 2\sqrt{L/C}$.
3. $\alpha < \omega_0$: 複素共役. このとき $R < 2\sqrt{L/C}$.

*¹ この場合, $v_C(0)$ が負となることに留意. 図 1 (b) のように書き直すと分かりやすいかも.

微分方程式 (3) の一般解は、それぞれに対応した異なる解の形式になる。それぞれの解の形式には、以下のような名称が与えられている。^{*2}

1. $\alpha > \omega_0$: 過減衰 (overdamping)
2. $\alpha = \omega_0$: 臨界減衰 (critical damping)
3. $\alpha < \omega_0$: 減衰振動 (underdamping)^{*3}

【過減衰】

$\alpha > \omega_0$ の場合、 s_1, s_2 はどちらも負の実数となる。指数関数の指数が負であることを式中で明示するために

$$s_1 = -\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) = -\beta_1 < 0$$

$$s_2 = -\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) = -\beta_2 < 0$$

とすると、一般解は、

$$i(t) = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_2 e^{-\beta_2 t}$$

初期条件の式 (1) より、

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \therefore A_2 = -A_1$$

$$\therefore i(t) = A_1 \left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} \right)$$

初期条件の式 (2) より、

$$\begin{aligned} v_L(0) &= L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \\ &= LA_1 \left(-\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= LA_1 (-\beta_1 + \beta_2) = V_0 \end{aligned}$$

$$\therefore A_1 = \frac{V_0}{L(\beta_2 - \beta_1)}$$

よって、初期条件が式 (1)、式 (2) の場合の解は、^{*4}

$$i(t) = \frac{V_0}{L(\beta_2 - \beta_1)} \left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} \right)$$

図 2 (a) は過減衰の特性の具体例である。回路素子パラメータと初期条件は以下の通りである。

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$C = 10 \text{ } \mu\text{F}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \times 2 = 63.25 \times 2 = 126.5 \text{ } \Omega$$

$$V_0 = 1 \text{ V}$$

t が小さいときには、 $e^{-\beta_1 t}$ よりも変化が急峻な $e^{-\beta_2 t}$ が $i(t)$ の特性を支配する。一方、 t が大きくなると、 $e^{-\beta_2 t}$ がほとんどゼロになるため、 $i(t)$ の特性は、 $e^{-\beta_1 t}$ で支配される。

【臨界減衰】

$\alpha = \omega_0$ の場合、

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

より、

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A e^{-\alpha t}$$

$$A = A_1 + A_2$$

となるが、これは任意定数を 1 個しか持たないため、2 階微分方程式 (3) の一般解にはならない。そのため、次式で示される元の微分方程式に戻って考える。^{*5}

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

これは以下のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) + \alpha \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) = 0$$

ここで、

$$f = \frac{di}{dt} + \alpha i$$

とすると、

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0 \quad \therefore f = B_1 e^{-\alpha t}$$

よって、

$$B_1 e^{-\alpha t} = \frac{di}{dt} + \alpha i \quad \therefore e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = B_1$$

^{*2} 制御工学では日本語が異なる。「overdamping」は「過制動」、「critical damping」は「臨界制動」、「underdamping」は「不足制動」。制御工学では、発生した振動を抑制することの方が「よいこと」という認識なので（例えば自動車のサスペンションやダンパー）、「不足制動」はダメ、減衰速度が最も速い「臨界制動」がベスト、振動しないが減衰速度が遅い「過制動」はダメ、という視点で特性図を見る。共振回路の場合は、視点が逆となり、振動が持続すること（不足制動）の方が「よいこと」という視点で特性図を見る。

^{*3} 直訳的には「不足減衰」。

^{*4} $\beta_1 < \beta_2$ 、 $e^{-\beta_1 t} \geq e^{-\beta_2 t}$ であることに留意。

^{*5} または、任意定数 A を関数 $A(t)$ として「定数変化法」を使う。

これは以下のようにも書ける。

$$\frac{d}{dt}(e^{at}i) = B_1 \quad \therefore e^{at}i(t) = B_1t + B_2$$

よって、一般解は、

$$i(t) = (B_1t + B_2)e^{-at}$$

初期条件の式 (1) より、

$$i(0) = B_2 = 0 \\ \therefore i(t) = B_1t e^{-at}$$

初期条件の式 (2) より、

$$v_L(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \\ = LB_1(e^{-at} - ate^{-at}) \Big|_{t=0} \\ = LB_1 = V_0 \\ \therefore B_1 = \frac{V_0}{L}$$

よって、初期条件が式 (1)、式 (2) の場合の解は、

$$i(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-at}$$

図 2 (b) は臨界減衰の具体例である。回路素子パラメータと初期条件は以下の通りである。

$$L = 10 \text{ mH} \\ C = 10 \text{ } \mu\text{F} \\ R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 63.25 \text{ } \Omega \\ V_0 = 1 \text{ V}$$

$t = 1/\alpha$ で極大値をとり、その後減衰する。臨界減衰応答は、他の減衰と比較して、最も減衰速度が速い。なお、過減衰と臨界減衰は波形が酷似しているため、波形からどちらであるかを判定するのは困難である。

【減衰振動】

$\alpha < \omega_0$ の場合、ルートの中の $\alpha^2 - \omega_0^2$ が負になるため、

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d \\ \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

となる。^{*6} この時の一般解は、

$$i(t) = A_1 e^{-at+j\omega_d t} + A_2 e^{-at-j\omega_d t} \\ = e^{-at}(A_1 e^{+j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

Euler の公式を使うと、

$$i(t) = e^{-at}[B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t] \\ B_1 = A_1 + A_2 \\ B_2 = j(A_1 - A_2)$$

初期条件の式 (1) より、

$$i(0) = B_1 = 0 \\ \therefore i(t) = B_2 e^{-at} \sin \omega_d t$$

初期条件の式 (2) より、

$$v_L(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \\ = LB_2(-\alpha e^{-at} \sin \omega_d t + e^{-at} \omega_d \cos \omega_d t) \Big|_{t=0} \\ = LB_2 \omega_d = V_0 \\ \therefore B_2 = \frac{V_0}{\omega_d L}$$

よって、初期条件が式 (1)、式 (2) の場合の解は、

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega_d L} e^{-at} \sin \omega_d t$$

この特性は、減衰時定数が $1/\alpha$ 、周期が $T = 2\pi/\omega_d$ の減衰振動となる。 R が小さいほど減衰率が小さくなり、振動が持続される。図 2 (c) は不足減衰の具体例である。回路素子パラメータと初期条件は以下の通りである。

$$L = 10 \text{ mH} \\ C = 10 \text{ } \mu\text{F} \\ R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1}{5} = 63.25 \times \frac{1}{5} = 12.65 \text{ } \Omega \\ V_0 = 1 \text{ V}$$

^{*6} ω_d は減衰固有角周波数 (damped natural angular frequency) と呼ばれ、 ω_0 は非減衰固有角周波数 (undamped natural angular frequency) と呼ばれる。角周波数であることが自明である場合には、「角」や「angular」を省略する場合が多い。

豆知識

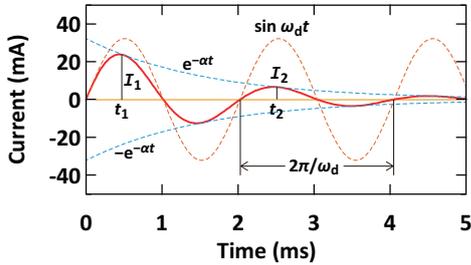
対数減衰率 δ と Q 値

図 3 RLC 直列回路の減衰振動の例.

減衰振動における振動の減衰の度合いは、**対数減衰率** (logarithmic decrement) という指標で表される。これは、図 2 (c) における I_1 と I_2 を用いて、次式における δ で定義される。

$$e^{-\delta} = \frac{I_2}{I_1} \quad \text{または} \quad \delta = -\ln \frac{I_2}{I_1} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

この対数減衰率 δ は、電源を接続した RLC 直列共振回路の Q 値との間に、近似的ではあるが、以下の関係がある。

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta}$$

証明

電源のない RLC 直列回路の場合には、

$$i(t) = I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

より、

$$I_1 = i(t_1) = I_0 e^{-\alpha t_1} \quad \because \sin \omega_d t_1 = 1$$

$$I_2 = i(t_2) = I_0 e^{-\alpha t_2} \quad \because \sin \omega_d t_2 = 1$$

$$\therefore e^{-\delta} = \frac{I_2}{I_1} = e^{-\alpha(t_2 - t_1)}$$

$$\therefore \delta = \alpha(t_2 - t_1)$$

ここで、

$$t_2 - t_1 = [\text{振動の一周期}] = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

であるから、

$$\delta = 2\pi \frac{\alpha}{\omega_d} = \pi \frac{R}{\omega_d L}$$

ここで、対数減衰率 δ が十分に小さい (つまり、振動の持続率が高い) 場合には、

$$\frac{\alpha}{\omega_d} = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2 - 1}} \ll 1 \quad \therefore \alpha \ll \omega_0$$

$$\therefore \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

よって、減衰振動の振動の持続率が高い場合の対数減衰率は、次式で近似できる。

$$\delta = \pi \frac{R}{\omega_d L} \approx \pi \frac{R}{\omega_0 L}$$

一方、電源を接続した RLC 直列回路の Q 値は、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

よって、対数減衰率 δ と Q 値の間には、近似的に以下の関係が成り立つ。

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta}$$

モールス信号を利用した通信技術の黎明期には、スパークギャップを介したコンデンサの急激な放電によってスパークトランスミッターで生成される減衰波の特性を評価する指標として、対数減衰率が非常に重要視されていた。

モールス信号を出すときに、減衰率が大きいと、時間領域でデルタ関数的なパルス信号となる。これを周波数領域に変換すると、その信号の周波数占有幅は極めて広いものとなり、複数の周波数帯域を用いた複数同時通信をやりやすくする。

一方、減衰率が小さい信号を使った場合には、占有する周波数帯域が減衰振動の周波数を中心とする狭い範囲の周波数帯域だけになるので、複数の周波数帯域を用いた複数同時通信がやりやすくなる。

このため、複数の通信をしても混信しない発信機が「よい」とされていた当時は、発信機の性能指標として、対数減衰率が用いられ、対数減衰率が小さいほどよい、という評価がなされていた。

しかし、ラジオなどの連続波を利用した通信技術が台頭してくると、連続波にマッチした Q 値の方が多用されるようになり、今日では、対数減衰率という用語はほとんど忘れられている。

豆知識

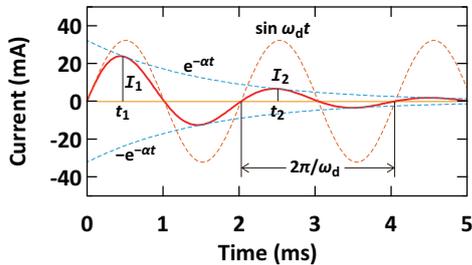
減衰振動の Q 値 (エネルギー方式)

図 4 RLC 直列回路の減衰振動の例.

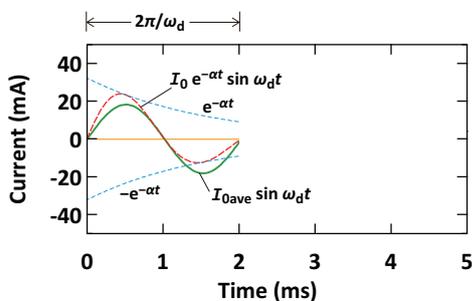


図 5 RLC 直列回路の減衰振動の最初の一周期 (赤の破線) を平均化した (緑の実線).

電源のある RLC 直列共振回路の場合、エネルギー方式で定義される Q 値は次式で与えられる.

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

減衰振動となる電源のない RLC 直列共振回路の場合でも、対数減衰率 δ が十分に小さい (つまり、 Q 値が十分に大きい) 場合には、電源がある場合の Q 値の式と近似的に同じ式になる.

証明

図 4 の減衰振動の波形は次式で表される.

$$i(t) = I_0 e^{-at} \sin \omega_0 t$$

ここで、 δ が十分に小さいことから、時刻 $t = 0 \rightarrow T_0$ (一周期) の電流の振幅を、以下のように平均値で代表させる.

$$I_{\text{ave}} = \frac{I_0}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-at} dt = \frac{I_0}{\alpha T_0} [1 - e^{-\alpha T_0}]$$

これは、減衰する正弦波を図 5 の緑の実線のように、減衰しない正弦波に近似したことに相当する. こうなると、後は電源がある場合の Q 値を求める作法 (結果も) と全く同じになる.

回路全体に保持されるエネルギーは、 L の保持エネルギーと C の保持エネルギーの和であるが、 L が最大保持のときに C のエネルギーはゼロ、 C が最大保持のときに L のエネルギーはゼロとなるので、 L または C の最大保持エネルギーを求めれば、それが回路全体の最大保持エネルギーとなる. ここでは、 L の最大保持エネルギーを使って Q 値を求める.

$t = 0 \rightarrow T_0$ の間で、 L に保持されるエネルギーの最大値は、電流が最大 (振幅と同じ) になったときに得られ、次式で近似される.

$$W_S \approx \frac{1}{2} L I_{\text{ave}}^2$$

R で $t = 0 \rightarrow T_0$ (一周期) の間に消費されるエネルギーは、平均電力の T_0 倍であるから、次式で近似される.

$$W_D \approx \frac{1}{2} R I_{\text{ave}}^2 \times T_0 = \frac{1}{2} R I_{\text{ave}}^2 \times \frac{2\pi}{\omega_0}$$

よって、エネルギー方式の Q 値は次式で近似される.

$$Q \approx 2\pi \frac{W_S}{W_D} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_{\text{ave}}^2}{\frac{1}{2} R I_{\text{ave}}^2 \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

ここで、 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であるから、

$$Q \approx \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

となり、電源がある場合と同じ式になる.